ГЕОМЕТРИЯ

8

Н.Б. Мельникова

УМК

Поурочное планирование по геометрии

К учебнику А.В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы»

- Планы уроков
- Рекомендации к изложению теории
- Решение задач
- Самостоятельные и контрольные работы
- Организация повторения

8 класс

ЭКЗАМЕН

Учебно-методический комплект

Н.Б. Мельникова

Поурочное планирование по геометрии

Учебно-методическое пособие
к учебнику А.В. Погорелова
«Геометрия 7–9»
(М.: Просвещение)

8 класс

Рекомендовано
Российской Академией Образования

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2009

УДК 372.8:512(075.3)
ББК 74.262.21я72
М47

Мельникова, Н.Б.

М47 Поурочное планирование по геометрии: 8 класс: к учебнику А.В. Погорелова, «Геометрия. 7–9 классы» / Н.Б. Мельникова. — М.: Издательство «Экзамен», 2009. — 382, [2] с. (Серия «Учебно-методический комплект»)

ISBN 978-5-377-01632-8

Данное пособие предназначено учителям, ведущим преподавание геометрии в 8 классе общеобразовательных учреждений по современному учебнику А.В. Погорелова «Геометрия. 7–9». Оно содержит: подробные методические рекомендации, распределенные по параграфам учебника, и планируемые обязательные результаты обучения; примерное поурочное планирование учебного материала; конспекты проведения уроков; варианты контрольных и самостоятельных работ.

А также в нем приведены: схемы решения основных (опорных), а также наиболее трудных задач; решения или указания к решениям задач из учебника; дополнительные задачи.

УДК 372.8:512(075.3)
ББК 74.262.21я72

Формат 60x90/16. Гарнитура «Школьная». Бумага газетная.
Уч.-изд. л. 13,40. Усл. печ. л. 24,00. Тираж — 10000 экз. Заказ № 26781.

ISBN 978-5-377-01632-8

Содержание

Предисловие

Эта книга предназначена учителю, работающему в VIII классах по учебнику А.В. Погорелова «Геометрия, 7–9» М.: Просвещение, 2007. В книге даны рекомендации, разработанные в соответствии с научно-методической концепцией учебника и ориентирующие учителя на достижение результатов, отвечающих требованиям образовательных стандартов к математической подготовке учащихся.

Об учебнике геометрии. Важной особенностью курса геометрии в изложении А.В. Погорелова является построение его на аксиоматической основе. По основной линии курс выстроен строго дедуктивно.

Наглядность играет существенную роль при введении понятий, как первичных, так и определяемых. Наряду с формально-логическими определениями понятий, в пособии часто даются конструктивные определения, т.е. описания способов построения соответствующих объектов.

Система доказательств в пособии базируется в основном на использовании признаков равенства и подобия треугольников. Такой традиционный подход к доказательствам способствует лучшему их усвоению, развитию логического мышления в сочетании с геометрическим видением. «Весь многовековой опыт преподавания геометрии со времен Евклида доказывает рациональность традиционной системы. Ее совершенствование, связанное с общим развитием науки, нам кажется, не должно касаться ее разумных и глубоко продуманных основ» (*Погорелов А.В.* Элементарная геометрия. М.: Наука, 1972. — С. 7).

Естественно, что степень детализации доказательств убывает по мере продвижения по курсу. Вначале доказательства проводятся подробно вплоть до ссылок на аксиомы. В дальнейшем доказательства даются в существенно более свернутом виде. Однако для наиболее важных теорем, а также теорем, способ доказательства которых является новым для учащихся, детализация рассуждений остается достаточно высокой.

Наряду со строго логическими доказательствами прикладного характера в пособии допускаются отступления от строгой дедукции, привлечение наглядно-интуитивных представлений. Так, несколько ослаблена логическая строгость при изложении «аппаратных» разделов курса: «Декартовы координаты на плоскости», «Движение», «Векторы».

Чрезвычайно важная роль отводится в пособии задачам. Предполагается, что новые понятия, их свойства, способы рассуждений будут усваиваться учащимися, главным образом, в процессе решения задач. В пособии предусмотрены серии задач, в которых одно и то же понятие предстает в разных ракурсах, в качестве компонентов различных конфигураций.

Для отдельных задач решения приводятся в учебнике. Некоторые из них содержат интересные геометрические факты и служат дополнением к теоретическому материалу учебника, другие являются типовыми — умение решать их является обязательным для всех учащихся, третьи представляют собой задачи повышенной трудности, на примере которых более широко раскрываются возможности, заложенные в теоретическом материале учебника.

Ввиду весьма высокого уровня дедукции в изложении курса чертежи играют при его изучении особую роль. Во избежание отрыва словесно-логических конструкций от геометрических образов необходимо систематическое и целенаправленное привлечение чертежей и при введении понятий, и при формулировании и доказательстве теорем, и при решении задач. Чертежи должны использоваться не только как способ описания геометрических ситуаций или в качестве иллюстраций, но и как дидактическое средство развития геометрической интуиции, формирования наглядных представлений, необходимых для понимания и усвоения материала.

Структура методического пособия. Так как учебник рассчитан в основном на работу по нему учащихся после разбора материала на уроке под руководством учителя, то основное назначение данного методического пособия — помочь учителю в организации работы на уроке. В соответствии с этой целью в книге даются рекомендации к организации различных этапов учебного процесса.

Обязательный минимум содержания и требования к подготовке. Приводятся выдержки из текста федерального компонента государственных образовательных стандартов общего образования, утвержденного Министерством образования Российской Федерации[1]. В частности, из «Обязательного минимума содержания основных образовательных программ» и «Требований к уровню подготовки выпускников» приводятся фрагменты, относящиеся к курсу геометрии 8 класса.

Планирование изучения материала. Рекомендуемое планирование рассчитано на то, что на изучение геометрии отводится два урока в неделю. Для каждой темы указано общее число учебных часов, отводимых на ее изучение, номера уроков, посвященных изучению фрагментов темы, и номера соответствующих пунктов учебника. Следует иметь в виду, что в планировании по каждой теме предусматривается один **резервный урок**. Он не нумеруется, но учитывается в числе уроков, отведенных на изучение всей темы. Резервный урок может быть использован для повторения материала темы или добавлен на итоговое повторение материала курса 8 класса. Кроме того, резервные часы можно оставить для тех случаев, когда по каким-либо причинам урок отменяется.

По каждому параграфу дается общая характеристика содержания, места и роли изучаемого материала в курсе, текущие требования к его усвоению, указываются методические особенности его изучения; предлагается подробное планирование изучения материала на каждом уроке, приводятся 1-2 контрольные работы в двух вариантах. Контрольные работы направлены на выявление итоговых результатов изучения темы (иногда части темы).

По каждому уроку приводятся комментарии и рекомендации, сгруппированные в следующие рубрики.

Комментарии для учителя. Учителю надо иметь в виду, что не весь материал данного методического пособия предназначен для вынесения на урок: иногда даются общие комментарии к

---

[1] Министерство образования Российской Федерации (Минобразования России). Приказ № 1089 от 05.03.2004 «Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования» Москва.

изучаемому содержанию, которые предназначены только для учителя с целью помочь ему сориентироваться в материале учебника, разобраться в его особенностях, правильно расставить акценты.

Требования к усвоению материала. Следует иметь в виду, что в этой рубрике приводятся текущие требования, то есть требования, предъявляемые к учащимся в ходе изучения текущего материала. Некоторые из них останутся требованиями, которые предъявляются и по окончании изучения всей темы и даже всего курса, а другие относятся только к текущему моменту. Так, например, умения доказывать теоремы, изученные в курсе, не относятся к итоговым требованиям к уровню подготовки учащихся.

План урока. Названы основные этапы работы на уроке с указанием примерного времени, отводимого на каждый из этапов (при этом 5 мин. оставлено в резерве).

Ход урока. Методические рекомендации к организации работы учителя и учащихся даются для каждого этапа урока.

Описываются возможные методические подходы к изложению материала на уроке, упражнения для лучшего осмысления и закрепления материала, сопутствующие средства наглядности (таблицы, чертежи).

Указываются задачи учебника, которые рекомендуется решить на уроке. Для них приводятся рисунки и решения. Следует иметь в виду, что не все задачи, отнесенные к материалу конкретного пункта, должны обязательно рассматриваться при изучении этого пункта, некоторые задачи можно использовать позднее, например, при повторении.

Для некоторых наиболее сложных теорем даются примерные планы проведения их доказательств. Такие планы можно рекомендовать для предъявления их учащимся в классе и записи в тетрадях, с тем чтобы с их помощью на уроке прослеживать и проводить основную линию доказательства и пользоваться ими при домашней работе с учебником. Запись плана целесообразна лишь в случаях сложных или объемных доказательств. В большинстве случаев достаточно наметить план устно, а письменно зафиксировать узловые моменты доказательства. Доказательства некоторых теорем (достаточно простые или аналогичные проводившимся ранее) рекомендуется предложить учащимся провести самостоятельно, иногда с помощью наводящих вопросов и указаний.

В этой же рубрике даются рекомендации к проведению повторения в тех случаях, когда это необходимо для полноценного усвоения нового материала; предлагаются различные формы повторения: задание на дом соответствующих разделов учебника и задач, специальные упражнения на уроке и т. п.

Если по ходу урока планируется проведение самостоятельной работы, то приводится текст работы в двух вариантах, к каждой вычислительной задаче дается ответ. По усмотрению учителя самостоятельные работы могут выполнять преимущественно контролирующую или обучающую функцию. В последнем случае оценки за эти работы можно не выставлять или выставлять не все оценки (например, только положительные или только по желанию учащихся).

Указания к решению задач. В этой рубрике приведены схемы решения задач, предлагаемых для домашней работы по данному уроку. Кроме того даются указания к решению задач, не вошедших в планирование.

Дополнительные задачи. Дополнительные задачи составляют некоторый «резерв» для учителя. Они либо дублируют задачи учебника, либо связаны с применением изученного материала в ситуациях, не отраженных в наборе задач учебника. Дополнительные задачи могут быть использованы как для работы со всеми учащимися, так и в качестве индивидуальных заданий.

Планирование изучения материала (68 ч)

В «Планировании изучения материала» к каждому параграфу предусмотрен резервный урок. Этот урок может быть использован учителем по своему усмотрению: добавлен к изучению какого-либо пункта, в качестве урока для подготовки к контрольной работе, может быть добавлен к часам, предусмотренным для изучения другого параграфа, или отнесен на конец учебного года в раздел «Повторение». Этот урок не нумеруется, но учитывается при общем количестве часов, отведенных на изучение параграфа.

Номер урока	Содержание учебного материала	Пункты учебника
	§ 6. Четырехугольники 20 уроков	**50–61**
1–2	Определение четырехугольника	50
3–4	Параллелограмм. Свойство диагоналей параллелограмма	51–52
5	Свойство противолежащих сторон и углов параллелограмма	53
6	Прямоугольник	54
7	Ромб	55
8	Квадрат	56
9–10	Решение задач	
11	Контрольная работа № 1	
12	Теорема Фалеса	57
13	Средняя линия треугольника	58
14–15	Трапеция	59
16	Теорема о пропорциональных отрезках. Построение четвертого пропорционального отрезка	60–61

Продолжение табл.

Номер урока	Содержание учебного материала	Пункты учебника
17–18	Решение задач	
19	Контрольная работа № 2	
	Резервный урок	
	§ 7. Теорема Пифагора 18 уроков	
21	Косинус угла	62
22	Теорема Пифагора	63
23	Египетский треугольник. Перпендикуляр и наклонная	64–65
24	Неравенство треугольника	66
25	Решение задач	
26	Контрольная работа № 3	
27–29	Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике	67
30–32	Значения синуса, косинуса и тангенса некоторых углов	69
33–34	Основные тригонометрические тождества. Изменение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$ при возрастании угла α	68–70
35–36	Решение задач	
37	Контрольная работа № 4	
	Резервный урок	
	§ 8. Декартовы координаты на плоскости 10 уроков	
39	Определение декартовых координат. Координаты середины отрезка	71–72
40	Расстояние между точками	73
41	Уравнение окружности	74

Продолжение табл.

Номер урока	Содержание учебного материала	Пункты учебника
42	Уравнение прямой. Координаты точки пересечения прямых	75–76
43	Расположение прямой относительно системы координат. Угловой коэффициент в уравнении прямой. График линейной функции	77–79
44	Пересечение прямой с окружностью	80
45	Определение синуса, косинуса и тангенса для любого угла от 0° до 180°	81
46	Решение задач	
47	Контрольная работа № 5	
	Резервный урок	
	§ 9. Движение **8 уроков**	
49	Преобразования фигур. Свойства движения	82–83
50	Симметрия относительно точки	84
51	Симметрия относительно прямой	85
52	Поворот	86
53	Параллельный перенос и его свойства	87
54	Существование и единственность параллельного переноса. Сонаправленность полупрямых	88–89
55	Равенство фигур	90
	Резервный урок	
	§ 10. Векторы на плоскости **10 уроков**	
57	Абсолютная величина и направление вектора. Равенство векторов	91–92
58	Координаты вектора	93

Окончание табл.

Номер урока	Содержание учебного материала	Пункты учебника
59	Сложение векторов. Сложение сил	94–95
60	Умножение вектора на число	96
61–62	Скалярное произведение векторов	98
63	Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Разложение вектора по координатным осям	97, 99
64	Контрольная работа № 6	
	Резервный урок	
66–68	*Итоговое повторение*	

§ 6. Четырехугольники

Изучение данного параграфа вносит существенный вклад в логическое развитие учащихся. Во-первых, доказательства большинства теорем параграфа и решения многих задач проводятся с опорой на признаки равенства треугольников. Таким образом, умения учащихся применять признаки равенства треугольников получают здесь дальнейшее развитие. Во-вторых, углубляются общие представления учащихся о признаках и свойствах геометрических фигур. Основу для этого составляет изучение и применение в решении задач признаков и свойств рассматриваемых в теме видов четырехугольников.

Значительное внимание при изучении темы должно быть уделено решению задач, в ходе которых отрабатываются практические умения использования свойств и признаков четырехугольников для распознавания их конкретных видов и вычисления их элементов.

Определения, свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба и квадрата, рассмотренные в параграфе, дают учащимся мощный аппарат для проведения доказательств, который используется и в доказательстве теорем, и в решении задач, в значительной степени вытесняя применение признаков равенства треугольников и свойств параллельных прямых. Кроме параллелограммов рассматривается еще одна фигура — трапеция. В некоторых ранее действовавших учебниках параллелограмм относился к частному виду трапеции, а именно к трапеции, у которой боковые стороны параллельны. В данном же учебнике в определении трапеции говорится о том, что *только* две ее стороны параллельны.

Теорема Фалеса, рассматриваемая в этом параграфе, — вопрос традиционный. Она используется для доказательства теоремы о средней линии треугольника и теоремы о пропорциональных отрезках. Теорема о пропорциональных отрезках также играет в курсе вспомогательную роль: в дальнейшем она будет использована в доказательстве теоремы о косинусе угла. В различных школьных учебниках традиционно рассматривалась аналогичная теорема (в некоторых учебниках — лемма о подобии), однако доказательство, как правило, проводилось неполно. В некоторых курсах использовались свойства гомотетии, которые принимались без доказательства. В других курсах рассматривалось доказательство только для соизмеримых отрезков, которое затем дополнялось до общего случая рассуждениями, опирающимися на теорию действительного числа. В данном учебнике предлагается не апеллирующее к этой теории и вместе с тем полное доказательство теоремы.

Основная цель изучения темы — дать учащимся систематизированные сведения о свойствах четырехугольников и сформировать умения применять их при проведении доказательных рассуждений. Поэтому основное внимание при изучении темы необходимо уделить решению задач, в ходе которых отрабатываются умения применять свойства и признаки параллелограмма и его видов для распознавания конкретных видов четырехугольников и вычисления их элементов.

Следует иметь в виду, что в теоретической части параграфа рассматриваются в основном свойства изучаемых четырехугольников, необходимые для дальнейшего построения курса. Однако для решения ряда задач можно использовать и их признаки, вынесенные в задачи (18, 24–26, 33, 34, 36).

В результате изучения материала параграфа учащиеся должны:

— *знать* определения параллелограмма и его видов: прямоугольника, ромба, квадрата, их свойства и признаки, определение трапеции, свойства равнобокой трапеции;

— *уметь* применять определения, свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба и трапеции для распознавания указанных фигур и вычисления их элементов; теорему Фалеса для решения задач на деление отрезка на несколько равных частей и в обоснованиях того, что некоторая точка является серединой отрезка.

Урок 1

ТЕМА: Определение четырехугольника

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Рассматриваемый на уроке материал пункта 50 имеет вводный характер. Его назначение — ввести понятие четырехугольника и терминологию, относящуюся к его элементам: стороны и вершины, соседние и противолежащие вершины и стороны, диагонали. Практически все эти названия интуитивно понятны или знакомы учащимся из предшествующего изучения математики. Поэтому закрепление введенной терминологии целесообразно соединить с повторением вопросов курса VII класса, наиболее важных для изучения последующего материала. Этой цели могут служить наборы несложных задач на применение признаков равенства треугольников, признаков параллельности прямых, свойств углов при параллельных прямых. На первый урок целесообразно вынести задачи на признаки равенства треугольников.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

уметь изображать четырехугольники, называть по рисунку элементы четырехугольника: вершины, стороны, соседние и противолежащие вершины и стороны, диагонали; решать задачи на применение признаков равенства треугольников, используя терминологию, связанную с четырехугольником.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Изучение нового материала — 10 мин	Определения четырехугольника и его элементов
2	Решение задач — 27 мин	Дидактические задачи на повторение признаков равенства треугольников и усвоение новой терминологии

№	Этап урока	Содержание работы
3	Домашнее задание — 3 мин	Контрольные вопросы 1–5. Повторить вопросы 2, 4, 7 к § 4 (без доказательства). Задачи № 6 из § 3, № 15 из § 4

ХОД УРОКА

I. Изучение нового материала

1. Перед тем, как ввести определение четырехугольника, полезно напомнить учащимся определение треугольника:

Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки.

Затем на доске и в тетрадях изображается произвольный четырехугольник $ABCD$ (рис. 6.1). Этим рисунком иллюстрируется определение четырехугольника, выполнение всех данных в нем условий:

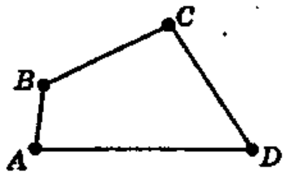


Рис. 6.1

Четырехугольником называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться.

После этого в ходе решения задачи 1 в качестве контрпримеров рассматриваются рисунки, которые показывают фигуры, где эти условия не выполняются (рис. 6.2):

— фигура $MNOP$ не является четырехугольником, так как два из данных отрезков лежат на одной прямой,

— фигура $FHKL$ не является четырехугольником, так как два из данных отрезков пересекаются.

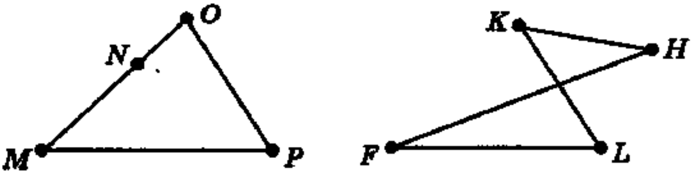


Рис. 6.2

2. Обратившись к четырехугольнику $ABCD$, изображенному на доске и в тетрадях (см. рис. 6.1), следует сказать, что точки, о которых говорится в определении четырехугольника, называются его вершинами, а отрезки — сторонами. Необходимо отметить, что четырехугольник обозначается последовательной записью его вершин, например четырехугольник $ABCD$, $BCDA$ и т.д. После этого можно предложить учащимся указать вершины и стороны изображенного четырехугольника.

С помощью этого же рисунка вводятся определения соседних и противолежащих вершин и сторон, определение диагонали:

Вершины четырехугольника называются соседними, если они являются концами одной его стороны.

Вершины, не являющиеся соседними, называются противолежащими.

Отрезки, соединяющие противолежащие вершины, называются диагоналями.

Уместно сразу же спросить учащихся, сколько диагоналей у четырехугольника, предложить построить их и назвать.

3. Для закрепления введенной терминологии полезно предложить учащимся назвать по имеющемуся рисунку:

а) вершины, соседние с вершиной A;

б) вершину, противолежащую вершине D;

в) какие-нибудь две соседние стороны;

г) сторону, противолежащую стороне AB;

д) диагонали четырехугольника;

е) углы четырехугольника.

II. Решение задач

Дальнейшее закрепление терминологии целесообразно провести в ходе фронтальной работы с классом по решению задач на признаки равенства треугольника (в дальнейшем оно может быть продолжено в ходе решения задач на параллельность прямых). Решение задач записывается на доске и в тетрадях.

Повторение признаков равенства треугольников

Решить задачу 1

В четырехугольнике ABCD соседние стороны AB и BC равны. Диагональ BD образует с этими сторонами равные углы (рис. 6.3). Докажите, что $\Delta ABD = \Delta CBD$.

Р е ш е н и е. Треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

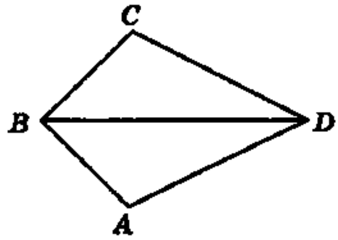


Рис. 6.3

Решить задачу 2

Диагонали четырехугольника, пересекаясь, делятся пополам. Одна из сторон равна 4 см. Чему равна противолежащая сторона четырехугольника?[1]

Р е ш е н и е.

Пусть сторона CD данного четырехугольника $ABCD$ равна 4 см (рис. 6.4). $\Delta AOB = \Delta COD$ по двум сторонам и углу между ними, $AB = CD$, так как лежат в равных треугольниках против равных углов.

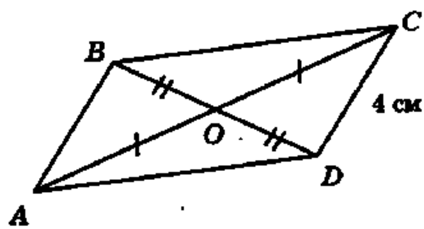


Рис. 6.4

О т в е т: 4 см.

Решить задачу 3

В четырехугольнике KLMN известно: $KL = LM$, $KN = NM$ (рис. 6.5). Докажите, что противолежащие углы K и M равны, а диагональ LN лежит на биссектрисе угла KLM.

Р е ш е н и е.

$\Delta KLN = \Delta MLN$ по трем сторонам. $\angle K = \angle M$, так как лежат в равных треугольниках против равных сторон. Аналогично, $\angle KLN = \angle MLN$, значит, луч LN является биссектрисой угла KLM.

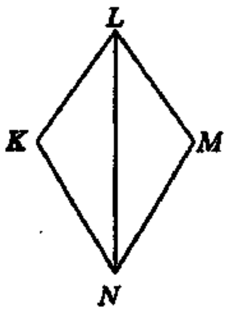


Рис. 6.5

[1] В этом и последующих заданиях ответ должен быть обоснован.

Решить задачу 4

Вершины четырехугольника ABCD лежат на окружности, а его диагонали являются диаметрами этой окружности. Сторона AB равна 3 см. Чему равна противолежащая ей сторона четырехугольника?

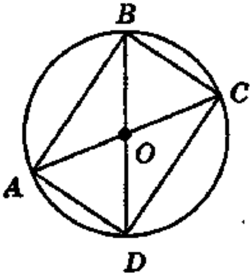


Рис. 6.6

Р е ш е н и е.

$\Delta AOB = \Delta COD$ по двум сторонам и углу между ними, так как отрезки OA, OB, OC и OD — это радиусы одной окружности, а углы AOB и COD — вертикальные (рис. 6.6). Стороны AB и CD равны, так как лежат в равных треугольниках против равных углов.

О т в е т: 3 см.

Решить задачу 5

В четырехугольнике MNPQ диагональ NQ образует со сторонами четырехугольника равные углы: $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ (рис. 6.7).

1) Докажите, что $\Delta MNQ = \Delta PNQ$.

2) Чему равен периметр четырехугольника, если $MN = 5$ см?

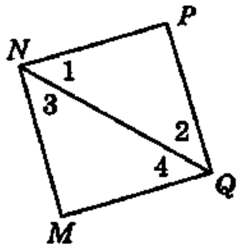


Рис. 6.7

Р е ш е н и е. 1) $\Delta\ MNQ = \Delta\ PNQ$ по стороне и прилежащим к ней углам. 2) Эти треугольники — равнобедренные, так как каждый из них имеет по два равных угла. Тогда стороны MN, MQ, NP и PQ равны, так как лежат в равных треугольниках против равных углов. $P_{MNPQ} = 4 \cdot 5 = 20$ (см).

О т в е т: 20 см.

Решить задачу 6

В четырехугольнике ABCD все стороны равны. Докажите, что его противолежащие углы равны.

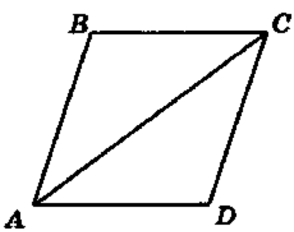


Рис. 6.8

Р е ш е н и е. Проведем диагональ AC. $\Delta ABC = \Delta ADC$ по трем сторонам (рис. 6.8). Тогда $\angle B = \angle D$, так как лежат в равных треугольниках против равных сторон. Аналогично $\angle BAC = \angle BCA = \angle DAC = \angle DCA$. Тогда $\angle BAD = \angle BCD$, так как они равны сумме равных углов.

III. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 1–5. Повторить вопросы 2, 4, 7 к § 4 (без доказательства). Решить задачи № 6 из § 3, № 15 из § 4.

Дополнительные задачи

1. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности, его соседние стороны AB и AD равны, а диагональ AC проходит через центр окружности (рис. 6.9). Докажите, что луч AC является биссектрисой его угла BAD.

Решение.

Проведем радиусы OB и OD, тогда $OA = OB = OD$ как радиусы одной окружности (рис. 6.10). Отсюда $\Delta AOB = \Delta AOD$ по трем сторонам. Углы BAO и DAO равны, так как лежат в равных треугольниках против равных сторон, следовательно, AC является биссектрисой его угла BAD.

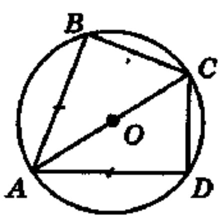


Рис. 6.9

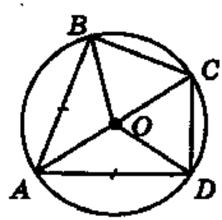


Рис. 6.10

Урок 2

ТЕМА: Определение четырехугольника

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Поскольку материал параграфа в основном посвящен видам параллелограмма и трапеции, то для его изучения очень важно уметь доказывать параллельность прямых или использовать следствия из параллельности прямых. Поэтому до введения понятия параллелограмма целесообразно повторить материал, связанный с параллельностью прямых. Это повторение лучше всего провести в процессе решения задач, поскольку требуется не формальное знание соответствующих сведений, а умение их применять в доказательных рассуждениях.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

уметь решать задачи на применение признаков параллельности прямых и свойств углов при пересечении двух параллельных прямых секущей, используя терминологию, связанную с четырехугольником.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 10 мин	
2	Решение задач — 27 мин	Дидактические задачи на повторение параллельности прямых и усвоение новой терминологии
3	Домашнее задание — 3 мин	Задачи № 1 и 2 из § 6, № 10 из § 4

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

1. Для проверки усвоения названия углов, которые образуются при пересечении двух прямых секущей, не следует требовать воспроизведения определений. Достаточно, если учащиеся ответят на вопросы по готовому рисунку (рис. 6.11). Свойства углов при параллельных прямых и секущей, а также признаки параллельности прямых тоже можно проверить, используя задания по этому рисунку.

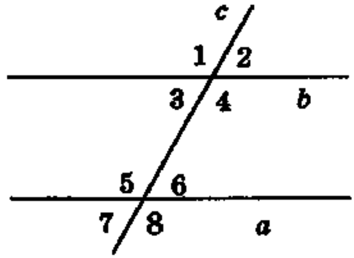


Рис. 6.11

1) На данном рисунке укажите:

а) пары внутренних накрест лежащих углов;

б) пары внутренних односторонних углов;

в) пары соответственных углов.

2) Какие равенства обозначенных углов должны выполняться, чтобы прямые a и b были параллельными?

3) Найдите все углы, если прямые a и b параллельны и $\angle 1 = 120°$.

2. При проверке решения задачи № 6 из § 3 следует выяснить, как обосновано равенство треугольников BAO и DCO (по стороне и двум прилежащим к ней углам, причем одна из пар углов является вертикальными углами). Кроме того, полезно, дополнив рисунок отрезками BC и AD, задать вопросы по получившемуся рисунку (рис. 6.12).

4) По данному рисунку (рис. 6.12) укажите:

а) вершины, соседние с вершиной C;

б) вершину, противолежащую вершине D;

в) какие-нибудь две соседние стороны;

г) сторону, противолежащую стороне AB;

д) диагонали четырехугольника.

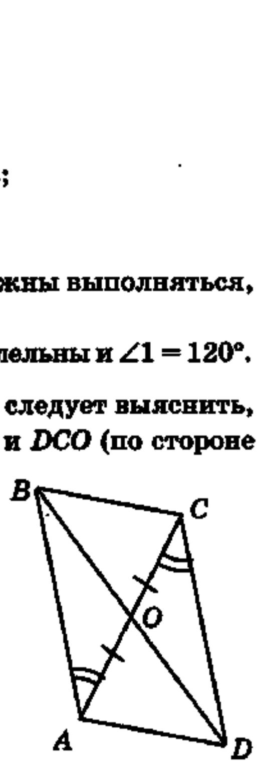


Рис. 6.12

II. Решение задач

В ходе фронтальной работы с классом по решению задач *на параллельность прямых* одновременно продолжается закрепление терминологии, связанной с четырехугольниками. Решение задач записывается на доске и в тетрадях.

Решить задачу 1

В четырехугольнике ABCD (рис. 6.13) известны углы при соседних вершинах: $\angle A = 40°$, $\angle B = 140°$. Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

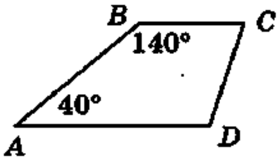


Рис. 6.13

Решение.

Прямые BC и AD параллельны, так как $\angle A$ и $\angle B$ — внутренние односторонние при этих прямых и секущей AB и $\angle A + \angle B = 180°$.

Решить задачу 2

Параллельны ли прямые a и b на рис. 6.14, если: а) $\angle 1 = \angle 2$; б) $\angle 1 = 36°$, $\angle 3 = 130°$?

Решение.

а) Если $\angle 1 = \angle 2$, то прямые параллельны, так как в этом случае вертикальные с ними углы равны, а они являются внутренними накрест лежащими при данных прямых и секущей;

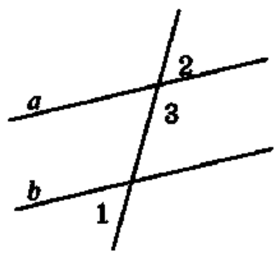


Рис. 6.14

б) угол, вертикальный углу 1, равен 36°; сумма этого угла с углом 3 равна 166°, значит, данные прямые не параллельны, так как если бы они были параллельны, то эта сумма была бы равна 180°.

Решить задачу 3

В четырехугольнике ABCD проведена диагональ AC. Известно, что $\angle ABC = 110°$, $\angle BCA = 40°$, а противолежащие стороны BC и AD параллельны (рис. 6.15). Чему равны $\angle CAD$ и $\angle BAC$?

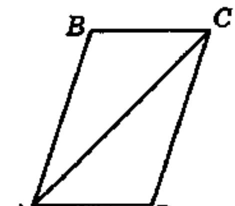


Рис. 6.15

Решение.

1) $\angle BCA = \angle CAD$ как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC, значит, $\angle CAD = 40°$;

2) $\angle ABC$ и $\angle BAD$ — внутренние односторонние при $BC \parallel AD$ и секущей AB, значит, $\angle BAD = 180° - \angle ABC = 70°$;

3) $\angle BAC = 70° - 40° = 30°$.

Решить задачу 4

В четырехугольнике ABCD проведена диагональ AC. Известно, что $\Delta ABC = \Delta CDA$ (рис. 6.15). Докажите, что противолежащие стороны четырехугольника параллельны: $BC \parallel AD$ и $AB \parallel CD$.

Решение.

1) Из равенства треугольников следует: $\angle ACB = \angle CAD$ и $\angle BAC = \angle DCA$.

2) $\angle ACB$ и $\angle CAD$ — внутренние накрест лежащие при BC и AD и секущей AC, а раз они равны, то $BC \parallel AD$.

3) $\angle BAC$ и $\angle DCA$ — внутренние накрест лежащие при AB и CD и секущей AC, а раз они равны, то $AB \parallel CD$.

Решить задачу 5

По данным, указанным на рис. 6.16, определите:

а) параллельны ли прямые NP и MT; б) параллельны ли прямые MN и PT; в) чему равен $\angle T$.

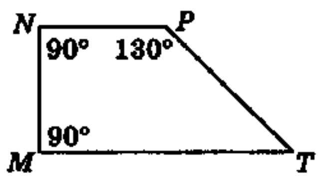


Рис. 6.16

Решение.

а) Прямые NP и MT параллельны как две прямые, перпендикулярные прямой MN;

б) прямые MN и PT не параллельны, так как сумма внутренних односторонних углов при этих прямых и секущей NP равна 220°;

в) т.к. $\angle P$ и $\angle T$ — внутренние односторонние при $NP \parallel MT$ и секущей PT, то $\angle T = 180° - 130° = 50°$.

Решить задачу 6

Диагонали AC и BD четырехугольника ABCD являются диаметрами одной окружности. Докажите, что $AB \parallel CD$.

Решение.

1) $\Delta AOB = \Delta COD$ по двум сторонам и углу между ними, так как отрезки OA, OB, OC и OD — это радиусы одной окружности, а углы AOB и COD — вертикальные (см. рис. 6.6).

2) $\angle ABD = \angle CDB$, так как лежат в равных треугольниках против равных сторон.

3) $AB \parallel CD$, т.к. внутренние накрест лежащие углы ABD и CDB при этих прямых и секущей BD равны.

III. Домашнее задание

Решить задачи № 1 и 2 из § 6, № 10 из § 4.

Дополнительные задачи

1. В треугольнике ABC параллельно стороне AB проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке N и сторону AC в точке M (рис. 6.17).

а) Докажите, что $\angle NMC = \angle BAC$.

б) Докажите, что если ΔABC равнобедренный с основанием AC, то ΔMNC тоже равнобедренный.

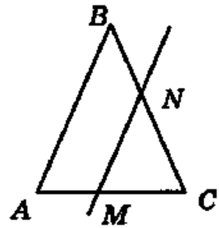


Рис. 6.17

2. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что прямые AD и BC параллельны (рис. 6.18). Определите углы четырехугольника, если каждый из углов A и C в 2 раза меньше угла B.

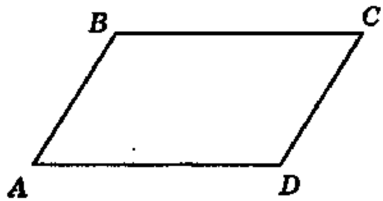


Рис. 6.18

3. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD образует со сторонами BC и AD равные углы, а сами стороны BC и AD равны (рис. 6.19). Докажите, что стороны AB и CD лежат на параллельных прямых.

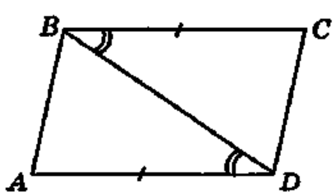


Рис. 6.19

Урок 3

ТЕМА: Параллелограмм. Свойство диагоналей параллелограмма

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

На уроке вводится определение параллелограмма и доказываются теоремы, выражающие признак параллелограмма и свойство его диагоналей. Доказательство первой из указанных теорем основано на применении признака равенства треугольников и признака параллельности прямых и в значительной мере подготовлено решением задач на повторение материала 7 класса.

При изучении теоремы о свойстве диагоналей параллелограмма надо иметь в виду следующее: нужно доказать не только то, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, но также и сам факт пересечения диагоналей. Для этого применяем следующий прием: сначала выполняем построение четырехугольника $ABCD$ с заведомо пересекающимися и делящимися пополам диагоналями, после чего доказываем его совпадение с данным параллелограммом.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

понимать, как применяются определение параллелограмма, его признак и свойство диагоналей;

уметь решать простейшие задачи на применение определения параллелограмма, его признака и свойства диагоналей.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 7 мин	
2	Объяснение нового материала и решение задач — 30 мин	Определение параллелограмма, признака параллелограмма и свойства его диагоналей. Задача № 22 (1), дидактические задачи на усвоение нового материала

№	Этап урока	Содержание работы
3	Домашнее задание — 3 мин	Контрольные вопросы 6–8 (вопрос 8 без доказательства). Задачи № 5 и 11

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Решение задачи 1 приведено в тексте учебника. Однако следует проверить (устно), как учащиеся обосновывают ответ на поставленный вопрос. Кроме того, при рассмотрении рис. 116 можно сообщить учащимся, что на нем изображен невыпуклый четырехугольник. Можно также изобразить на доске выпуклый четырехугольник и показать, чем он отличается от невыпуклого (у него любые две противолежащие вершины лежат по разные стороны от прямой, проходящей через две другие вершины). При этом формальные определения выпуклого и невыпуклого четырехугольников не приводятся.

Задачу 10 из § 4 лучше проверить с записью решения на доске.

II. Изучение нового материала, решение задач

1. Перед тем как ввести определение параллелограмма, полезно на доске и в тетрадях изобразить пару параллельных прямых, пересеченных двумя другими параллельными прямыми. Обозначив получившийся при этом четырехугольник (рис. 6. 20), приводим определение:

Параллелограмм — это четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны, т.е. лежат на параллельных прямых.

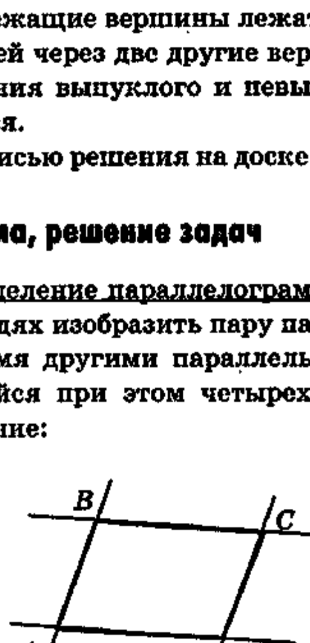


Рис. 6.20

Учащиеся записывают «Параллелограмм $ABCD$» (следует обратить их внимание на правильность написания слова «параллелограмм»), после чего им предлагается записать пары параллельных сторон: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Следует обратить внимание учащихся на то, что определение параллелограмма позволяет делать два вывода:

— если известно, что некоторый четырехугольник является параллелограммом, то можно сделать вывод о том, что его противоположные стороны параллельны;

— если известно, что у некоторого четырехугольника противоположные стороны попарно параллельны, то он является параллелограммом.

Закрепление определения параллелограмма проводится в ходе фронтальной работы с классом. С этой целью можно предложить учащимся задания (по рисункам на доске) :

Решить задачу (устно)

Дан $\triangle ABC$ (рис. 6.21). Параллельно сторонам AB и AC проведены прямые EF и DE. Определите вид четырехугольника ADEF.

Р е ш е н и е. По построению противолежащие стороны четырехугольника *ADEF* параллельны, значит, это параллелограмм.

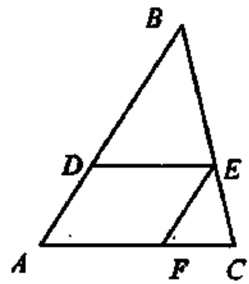


Рис. 6.21

Решить задачу (устно)

В параллелограмме ABCD проведена диагональ BD (рис. 6.22). Докажите, что $\angle ABD = \angle CDB$.

Р е ш е н и е. Так как *ABCD* — параллелограмм, то его противолежащие стороны *AB* и *CD* параллельны, тогда $\angle ABD = \angle CDB$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых *AB* и *CD* и секущей *BD*.

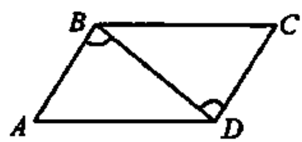


Рис. 6.22

Решить задачу

Прямая EF параллельна стороне AB параллелограмма ABCD (рис. 6.23). Докажите, что ABEF — параллелограмм.

Р е ш е н и е.

1) Так как *ABCD* — параллелограмм, то $AD \parallel BC$.

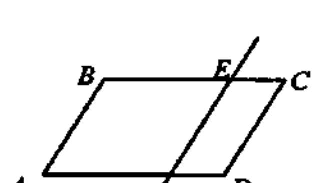


Рис. 6.23

2) $EF \parallel AB$ по построению.

3) Так как $AD \parallel BC$ и $EF \parallel AB$, то $ABEF$ — параллелограмм.

Полезно подчеркнуть, что при решении этой задачи определение параллелограмма было использовано дважды: нам было известно, что $ABCD$ — параллелограмм, и мы использовали параллельность его сторон, второй раз — на основании попарной параллельности сторон четырехугольника $ABEF$ делали вывод о том, что он является параллелограммом.

2. Перед доказательством теоремы о признаке параллелограмма следует напомнить учащимся о задаче из домашнего задания (№ 10 из § 4). В ней была доказана параллельность двух прямых (например, AD и BC на рис. 6.24), используя то, что по условию два отрезка (AC и BD) пересекаются в точке, которая делит их пополам. Следует заметить, что таким же образом можно доказать, что параллельны две другие прямые AB и CD, и предложить учащимся определить вид четырехугольника $ABCD$.

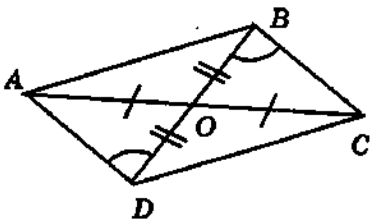


Рис. 6.24

Таким образом, справедлива теорема:

Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Полезно выполнить рисунок и записать доказательство на доске и в тетрадях.

Доказательство.

1) $\Delta AOD = \Delta COB$ по двум сторонам и углу между ними ($\angle AOD = \angle COB$ как вертикальные, $AO = OC$, $DO = OB$ по условию). Тогда $\angle ODA = \angle OBC$.

2) $\angle ODA$ и $\angle OBC$ — внутренние накрест лежащие при прямых AD и BC и секущей BD, и $\angle ODA = \angle OBC$, тогда $AD \parallel BC$.

3) Аналогично, $\Delta AOB = \Delta COD$, $\angle OBA = \angle ODC$, $AB \parallel DC$.

4) Так как $AD \parallel BC$ и $AB \parallel DC$, то $ABCD$ — параллелограмм.

Можно сделать замечание для учащихся, что доказанная теорема выражает признак параллелограмма, т.е. «примету», по которой можно узнать параллелограмм.

Для закрепления формулировки теоремы 6.1 можно предложить учащимся следующие задания по готовым рисункам:

Решить задачу (устно)

Дано: $AC = 6$ см, $BD = 8$ см, $AO = 3$ см, $OD = 4$ см (рис. 6.25). Определите вид четырехугольника $ABCD$.

Решение. $ABCD$ — параллелограмм, так как $AO = OC$ и $BO = OD$.

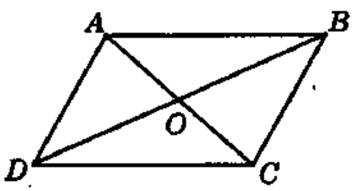


Рис. 6.25

Решить задачу (устно)

Дано: AO — медиана треугольника ABD, BO — медиана треугольника ABC (рис. 6.24). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

Решение. $ABCD$ — параллелограмм, так как $AO = OC$ и $BO = OD$.

Решить задачу

BM — медиана треугольника ABC (рис. 6.26). На ее продолжении за точку M отложен отрезок MD, равный BM. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.

Решение.

1) $AM = CM$, т.к. BM — медиана треугольника ABC.

2) $ABCD$ — параллелограмм, так как $AM = MC$ и $BM = MD$.

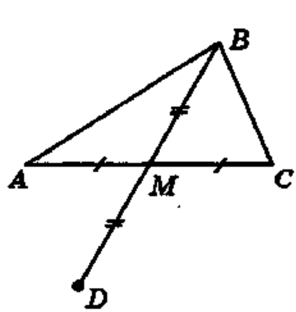


Рис. 6.26

3. Перед доказательством теоремы о свойстве диагоналей параллелограмма учащимся предлагается задача 22(1) на построение параллелограмма по двум сторонам и диагонали.

Решить задачу № 22(1)

Прежде чем приступить к описанию построений, выполняем рисунок 6.27 и проводим анализ.

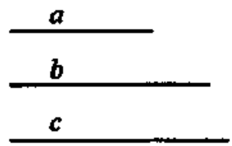


Рис. 6.27

Пусть нужно построить параллелограмм $ABCD$, в котором известны стороны AB и AD и диагональ BD. Эти три отрезка однозначно задают треугольник ABD, то есть три вершины параллелограмма. Если через середину O отрезка BD провести луч AO и отложить на нем отрезок OC, равный AO, то получим четвертую вершину C. По признаку параллелограмма $ABCD$ — параллелограмм.

Построения (рис. 6.28).

1) Строим ΔABD по трем сторонам: $AB = a$, $AD = b$, $BD = c$.

2) Строим точку O: $BO = OD$.

3) Строим луч AO, откладываем $OC = OA$.

4) $ABCD$ — параллелограмм, так как AC и BD пересекаются в точке O и $AO = OC$, $BO = OD$.

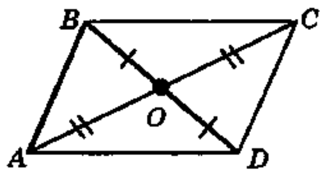


Рис. 6.28

4. Доказательство теоремы о свойстве диагоналей параллелограмма.

Сначала параллелограмм $ABCD$ изображаем без диагоналей (рис. 6.29, *а*). Примерный вариант изложения доказательства учителем может выглядеть следующим образом.

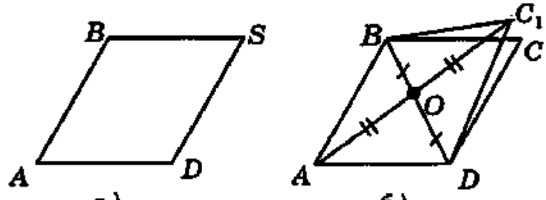


Рис. 6.29

Нам надо доказать, что диагонали AC и BD пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Поступим так: построим четырехугольник, в котором диагонали заведомо пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Затем докажем, что этот четырехугольник на самом деле совпадает с исходным параллелограммом. Это будет означать, что у исходного параллелограмма диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Вспомогательный четырехугольник будем строить, как в решенной перед этим задаче на построение, то есть так, чтобы AB и AD были его сторонами. Проведем отрезок BD — его диагональ и разделим его пополам точкой O. Соединим точки A и O отрезком AO и на его продолжении отложим отрезок $OC_1 = AO$. Соединим точку C_1 с точками B и D. (Одновременно с рассказом на доске последовательно выполняются соответствующие построения, в результате которых появляется рис. 6.29, *б*.)

В четырехугольнике ABC_1D диагонали по построению пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, по теореме 6.1 этот четырехугольник является параллелограммом.

Как мы знаем, в параллелограмме противолежащие стороны параллельны, значит, BC_1 параллельна AD. Но по условию $ABCD$ тоже параллелограмм, значит, и BC параллельна AD. Поскольку через точку B можно провести только одну прямую, параллельную AD, то прямая BC_1 совпадает с прямой BC.

Точно так же доказываем, что прямая DC_1 совпадает с прямой DC. Значит, точка C_1 совпадает с точкой C (то есть параллелограмм ABC_1D совпадает с параллелограммом $ABCD$, см. рис. 6.30). А раз так, то $AO = OC$, то есть диагонали AC и BD пересекаются в точке O и делятся в ней пополам.

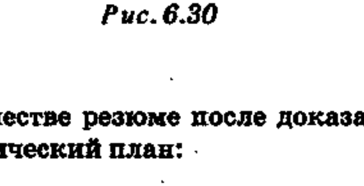


Рис. 6.30

По мере доказательства или в качестве резюме после доказательства полезно записать его схематический план:

План доказательства.

1) Построения: точка O ($BO = OD$), отрезок AC_1 ($AO = OC_1$).

2) ABC_1D — параллелограмм.

3) $ABCD$ совпадает с ABC_1D.

4) Вывод: $AO = OC$, $BO = OD$.

Для закрепления теоремы можно предложить учащимся следующие задания:

Решить задачу (устно)

ABCD — параллелограмм, O — точка пересечения его диагоналей.

а) Диагональ AC = 12 см. Чему равен отрезок AO?

Ответ: 6 см

б) Отрезок BO = 3 см. Чему равна диагональ BD?

Ответ: 6 см

в) Найдите периметр треугольника AOB, если сторона AB равна 7 см, а диагонали AC и BD равны 6 см и 10 см.

Ответ: 6 см

Решить задачу

Дан параллелограмм ABCD, его диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что $\Delta AOD = \Delta COB$.

Решение.

1) $AO = OC$, $BO = OD$ по свойству диагоналей параллелограмма (рис. 6.25).

2) $\angle AOD = \angle BOC$ как вертикальные углы.

3) $\Delta AOD = \Delta COB$ по двум сторонам и углу между ними.

III. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 6–8 (вопрос 8 без доказательства). Решить задачи № 5 и 11.

Указания к задачам

5. Расстояние между двумя точками — это длина отрезка. Так как диагонали параллелограмма пересекаются в точке, которая делит диагонали пополам, то расстояния от точки пересечения диагоналей до противолежащих вершин равны.

Ответ: 3 см и 4 см.

11. Задачу можно решать с опорой только на определение (не используя свойства противолежащих углов).

Решение.

1) Пусть $\angle A = 40°$. Т.к. $\angle A$ и $\angle B$ — внутренние односторонние при $AD \parallel BC$ и секущей AB, то $\angle B = 180° - 40° = 140°$ (рис. 6.31).

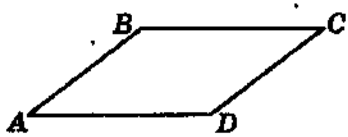


Рис. 6.31

2) Так как $\angle B$ и $\angle C$ — внутренние односторонние при $AB \parallel CD$ и секущей BC, то $\angle C = 180° - 140° = 40°$.

3) Так как $\angle C$ и $\angle D$ — внутренние односторонние при $AD \parallel BC$ и секущей CD, то $\angle D = 180° - 40° = 140°$.

Ответ: 140°, 40°, 140°.

Дополнительные задачи

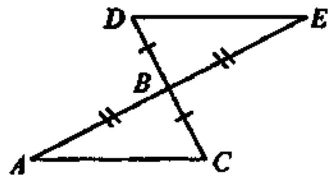


Рис. 6.32

1. Стороны AB и BC треугольника ABC продолжены за точку B (рис. 6.32), $BD = BC$, $BE = AB$. Докажите, что $ADEC$ — параллелограмм.

2. Из точки E, взятой на основании AC равнобедренного треугольника ABC, проведена прямая, параллельная стороне AB. Она пересекает сторону BC в точке D. Докажите, что ΔDEC — равнобедренный.

3. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла A, которая пересекает сторону BC в точке E. Докажите, что ΔABE равнобедренный.

Урок 4

ТЕМА: Параллелограмм. Свойство диагоналей параллелограмма

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Урок посвящен решению задач, в ходе решения которых продолжается отработка умений применять изученные сведения о параллелограмме.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать **формулировки определения параллелограмма, его признака и свойства диагоналей;**

уметь **решать задачи на применение определения параллелограмма, его признака и свойства диагоналей.**

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 10 мин	
2	Решение задач — 27 мин	Задачи № 6, 22(2), 3 (устно)
3	Домашнее задание — 3 мин	Задачи № 4, 7, 14

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

1. Проверить в ходе фронтального устного опроса усвоение формулировок определения параллелограмма, его признака и свойства диагоналей.

2. Проверить доказательство теоремы о признаке параллелограмма.

3. Проверить решение задач 5 (устно) и 11 с записью решения на доске.

II. Решение задач

Решить задачу

В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, причем $AO = OC$ и $\angle BAO = \angle OCD$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

Р е ш е н и е .

1) $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные (рис. 6.33), тогда $\triangle AOB = \triangle COD$ по стороне и прилежащим к ней углам. Отсюда $BO = OD$.

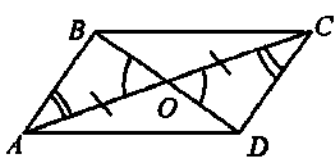


Рис. 6.33

2) Т.к. $AO = OC$ и $BO = OD$, то $ABCD$ — параллелограмм.

На примере решенной задачи обсуждается вопрос о том, чем отличаются применение ***признака параллелограмма*** и ***свойства параллелограмма***. В решенной задаче нужно было доказать, что данный четырехугольник — параллелограмм, и для этого мы использовали признак (на основании того, что диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, делали вывод о том, что рассматриваемый четырехугольник — параллелограмм). Если же в задаче дано по условию, что данный четырехугольник — параллелограмм, то в этом случае мы можем пользоваться свойством его диагоналей.

Решить задачу № 6

Развернутое решение задачи имеется в тексте учебника. Приведем вариант записи решения на доске и в тетрадях.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 6.34), $O \in EF$.

Доказать: $OF = OE$.

Доказательство.

1) $AO = OC$ (по свойству диагоналей параллелограмма);

2) $\angle AOE = \angle FOC$ (как вертикальные);

3) $\angle EAO = \angle FCO$ (как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC).

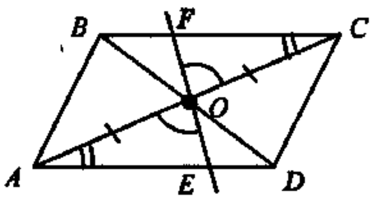


Рис. 6.34

4) $\Delta OAE = \Delta OCF$ по стороне и прилежащим к ней углам, следовательно, $OF = OE$.

Решить задачу № 22(2)

Прежде чем приступить к описанию построений, выполняем рисунок 6.35 и проводим анализ.

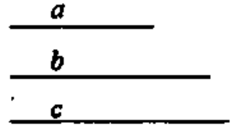


Рис. 6.35

Пусть нужно построить параллелограмм $ABCD$, в котором известны сторона AD и диагонали BD и AC, которые пересекаются в точке O. Точки A, O и D задают треугольник AOD, который мы можем построить, используя данные отрезки. Вершины B и C параллелограмма можно получить, если построить такие отрезки BD и

AC, для которых точка *O* будет серединой. Для этого нужно на продолжении отрезков *AO* и *DO* отложить равные им отрезки *OC* и *OB*.

Построения (рис. 6.36).

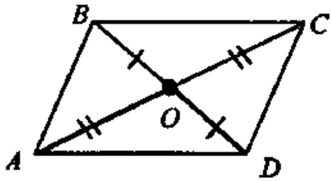


Рис. 6.36

1) Строим отрезки, равные $\frac{b}{2}$ и $\frac{c}{2}$.

2) Строим ΔAOD по трем сторонам: $AD = a$, $AO = \frac{c}{2}$, $OD = \frac{b}{2}$.

3) Строим луч *AO*, откладываем *OC* = *OA*.

4) Строим луч *DO*, откладываем *OB* = *OD*.

5) *ABCD* — параллелограмм, так как *AC* и *BD* пересекаются в точке *O* и *AO* = *OC*, *BO* = *OD*.

Решить задачу № 3 (устно)

Р е ш е н и е. Любые три вершины параллелограмма задают две его стороны и одну диагональ. Чтобы построить параллелограмм, нужно построить четвертую его вершину. Это можно сделать двумя способами. Первый способ (рис. 6.37) — построить прямые, параллельные заданным сторонам и проходящие через две данные вершины, точка пересечения этих прямых будет искомой вершиной.

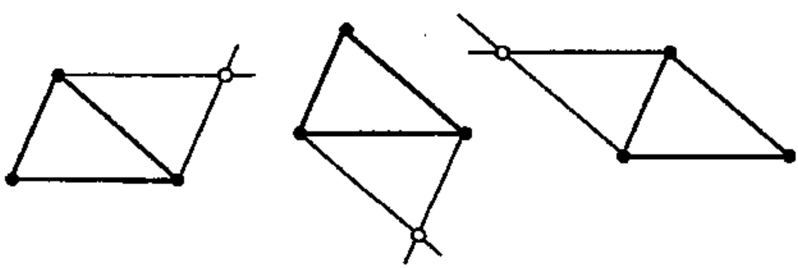


Рис. 6.37

Второй способ (рис. 6.38) — построить середину диагонали, заданной двумя вершинами, соединить ее с третьей заданной вершиной, продолжить построенный отрезок и отложить на его продолжении равный ему отрезок. Конец этого отрезка будет искомой вершиной.

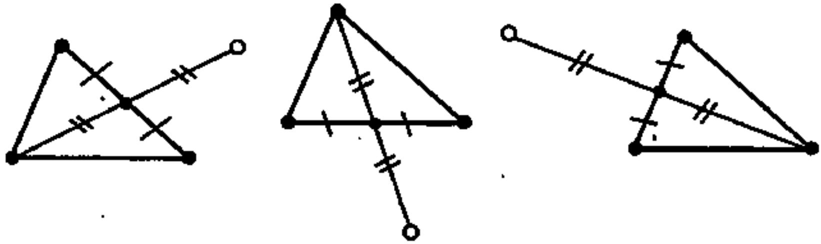


Рис. 6.38

Поскольку из трех заданных отрезков любой может быть диагональю, а два других — сторонами, то всего можно построить три параллелограмма с вершинами в трех заданных точках, не лежащих на одной прямой.

III. Домашнее задание

Решить задачи № 4, 7 и 14.

Указания к задачам

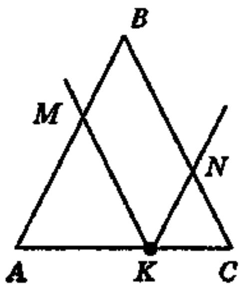


Рис. 6.39

4. Р е ш е н и е. 1) $\angle AKM = \angle C$ как соответственные при $MK \parallel BC$ и секущей AC (рис. 6.39), $\angle A = \angle C$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Значит, $\angle A = \angle AKM$, откуда следует, что ΔAMK — равнобедренный: $AM = MK$.

2) Аналогично доказываем, что $KN = NC$.

3) $P_{KMBN} = MK + MB + BN + NK = AM + MB + BN + NC = AB + BC = 10$ м.

7. Задача может быть решена несколько короче с применением свойства сторон параллелограмма, а в данном пункте можно опираться только на свойство диагоналей, поэтому придется доказать равенства двух пар треугольников.

Решение.

1) (рис. 6.40) $FO = OE$ (доказано в задаче 6), $BO = OD$ (по свойству диагоналей параллелограмма, $\angle FOD = \angle BOE$ (как вертикальные), следовательно, $\Delta DOF = \Delta BOE$ по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников следует, что $FD = BE = 2$ м, $AD = 2{,}8$ м $+ 2$ м $= 4{,}8$ м.

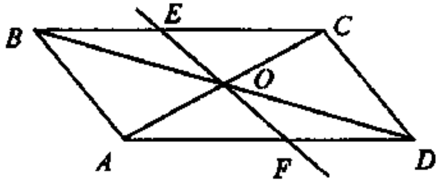


Рис. 6.40

2) Аналогично доказываем, что $\Delta AOF = \Delta COE$, откуда $CE = AF = 2{,}8$ м, $BC = 2$ м $+ 2{,}8$ м $= 4{,}8$ м.

Ответ: 4,8 м, 4,8 м.

14. Решение. 1) $\angle BAD = 35° + 25° = 60°$(рис. 6.41).

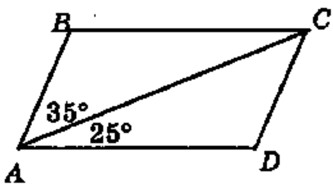


Рис. 6.41

2) $\angle ACD = \angle BAC = 35°$ как внутренние накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей AC, $\angle CAD = \angle ACB = 25°$ как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC, отсюда $\angle BCD = 35° + 25° = 60°$.

3) $\angle BAD + \angle ABC = 180°$ как внутренние односторонние при $BC \parallel AD$ и секущей AB, отсюда $\angle ABC = 180° - 60° = 120°$, $\angle ADC + \angle BCD = 180°$ как внутренние односторонние при $BC \parallel AD$ и секущей CD, отсюда $\angle ADC = 180° - 60° = 120°$.

Ответ: 60°, 120°,60°,120°.

Дополнительные задачи

1. AC и BD — диаметры окружности с центром O. Докажите, что A, B, C и D — вершины параллелограмма.

2. $ABCD$ — параллелограмм, $\angle ACB = 30°$, $\angle BAC = 40°$. Найдите $\angle ADC$.

3. AC и BD — диаметры двух окружностей с общим центром O. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

4. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD равны, O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что ΔCOD равнобедренный.

5. В параллелограмме $ABCD$ стороны AB и BC равны диагонали AC, точка O является точкой пересечения диагоналей. Докажите, что $BO \perp AC$.

Урок 5

ТЕМА: Свойство противолежащих сторон и углов параллелограмма

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

На этом уроке, посвященном изучению материала пункта 53, завершается изучение теоретических сведений о параллелограмме (общего вида). В пункте помимо свойств углов и сторон параллелограмма формулируется (в задаче 18) традиционный признак параллелограмма (две противолежащие стороны параллельны и равны). В предложенном в учебнике решении используется тот же прием, что и в доказательстве теоремы 6.2 о свойстве диагоналей параллелограмма: здесь также строится параллелограмм ABC_1D, который с данным четырехугольником $ABCD$ имеет три общие вершины A, B, D, затем доказывается, что четвертая вершина у них общая (откуда следует, что данный четырехугольник является параллелограммом). При решении задачи на уроке учитель может подчеркнуть эту аналогию. Рассматривающийся здесь признак параллелограмма вынесен в задачный материал, поскольку он не используется в построении теории. Однако в решении задач он находит применение (в том числе в курсе стереометрии), поэтому целесообразно его закрепить (например, в ходе решения задачи 17 и, возможно, дополнительных задач 4 и 5).

При изучении пункта основное внимание должно быть уделено решению задач на применение всех изученных свойств и признаков параллелограмма.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать свойства сторон и углов параллелограмма, признак параллелограмма (по параллельности и равенству двух сторон);

уметь решать задачи на применение всех изученных сведений о параллелограмме.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 10 мин	Свойства углов и сторон параллелограмма, признак параллелограмма (по параллельности и равенству двух сторон). Задачи № 8 (устно), 9 (устно)
3	Решение задач — 12 мин	Задачи № 18, 17, 12, 20
4	Самостоятельная работа — 10 мин	
5	Домашнее задание — 3 мин	Контрольный вопрос 9, формулировка признака параллелограмма (задача 18). Задачи № 15(1), 16(1), 19

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить решение задач 4, 7 и 11 устно с выполнением рисунков на доске.

II. Изучение нового материала

1. Учащимся сообщается формулировка теоремы.

У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.

Выполняются рисунок (рис. 6.42), и краткая запись условия.

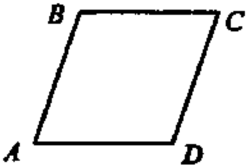


Рис. 6.42

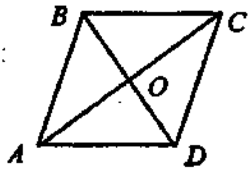


Рис. 6.43

Дано: $ABCD$ — параллелограмм.

Доказать: $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

По ходу проведения доказательства на доске и в тетрадях выполняются записи шагов доказательства.

1) Проведем AC и BD, O — точка их пересечения (рис. 6.43).

2) $\Delta AOB = \Delta COD$ по двум сторонам и углу между ними ($AO = OC$, $BO = OD$ по свойству диагоналей параллелограмма, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные). Тогда $AB = CD$.

3) $\Delta AOD = \Delta COB$ по двум сторонам и углу между ними ($AO = OC$, $BO = OD$ по свойству диагоналей параллелограмма, $\angle AOD = \angle COB$ как вертикальные). Тогда $AD = CB$.

4) $\Delta ABC = \Delta CDA$ по трем сторонам ($AB = CD$, $AD = CB$ по доказанному, AC — общая сторона). Тогда $\angle ABC = \angle ADC$.

5) $\Delta DAB = \Delta BCD$ по трем сторонам ($AB = CD$, $AD = CB$ по доказанному, BD — общая сторона). Тогда $\angle DAB = \angle BCD$.

2. Для закрепления *свойств противолежащих сторон и углов параллелограмма* можно использовать следующие задания.

Решить задачу № 8 (устно). Ответ: 15 см и 10 см.

Решить задачу № 9 (устно). Ответ: 150°, 30°, 150°.

Решить задачу

Две стороны параллелограмма равны 3 см и 6 см. Чему равен периметр параллелограмма?

Ответ: 18 см.

Решить задачу

Сумма двух противолежащих углов параллелограмма равна 86°. Чему равны эти углы?

Ответ: 43°.

Решить задачу

Известно, что в параллелограмме один угол в 2 раза больше другого. Являются ли эти углы противолежащими?

Ответ: нет, так как противолежащие углы должны быть равны.

III. Решение задач

Решить задачу № 18

Решение задачи представляет непростое доказательство, поэтому его лучше изложить учителю. Целесообразно предложить учащимся записать в тетрадях формулировку признака и запомнить ее как теорему, которую можно применять в решении задач (не требуя от учащихся воспроизведения доказательства):

Если у четырехугольника две стороны параллельны и равны, то он является параллелограммом.

Дано: четырехугольник $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = CD$.

Доказать: $ABCD$ — параллелограмм.

Доказательство.

1) Проводим $BC_1 \parallel AD$, где C_1 — точка на луче DC (рис.6.43).

2) ABC_1D — параллелограмм, т. к. $AB \parallel CD$, $BC_1 \parallel AD$.

3) $C_1D = AB$ (по свойству сторон параллелограмма), тогда $C_1D = CD$, т.е. точки C_1 и C совпадают. Следовательно, $ABCD$ совпадает с ABC_1D, т.е. $ABCD$ — параллелограмм.

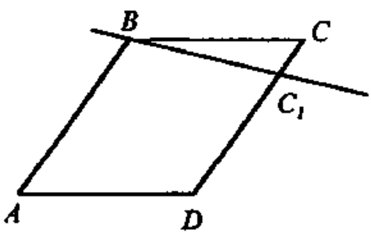


Рис. 6.43

Решить задачу № 17 (на применение рассмотренного признака параллелограмма)

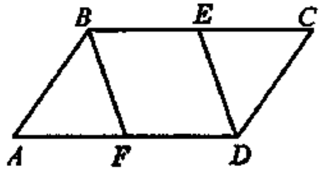


Рис. 6.44

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $BE = EC$, $AF = FD$ (рис. 6.44).

Доказать: $BEDF$ — параллелограмм.

Доказательство.

1) $BC \parallel AD$, т. к. $ABCD$ — параллелограмм, тогда $BE \parallel DF$.

2) $BC = AD$, т.к. $ABCD$ — параллелограмм, $BE = \frac{1}{2}BC$, $DF = \frac{1}{2}AD$, тогда $BE = DF$.

3) $BEDF$ — параллелограмм, т.к. $BE \parallel DF$ и $BE = DF$.

Решить задачу № 12

Решение.

Углы, о которых говорится в условии, не могут быть противолежащими, так как они не равны. Значит, они прилежат к одной стороне, то есть в сумме составляют 180°. Если один из углов равен $x°$, а другой $(x + 50)°$, то $2x + 50 = 180$. Откуда $x = 65$.

Ответ: 65°, 115°, 65°, 115°.

Решить задачу № 20

Полезно напомнить учащимся, как удобно обозначать величины, если дано их отношение. Например, этой задаче стороны удобно обозначить $3x$ и $4x$.

Решение.

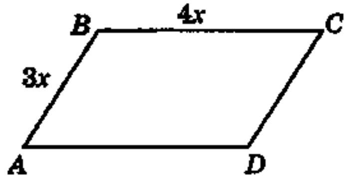


Рис. 6.45

1) Пусть $AB = 3x$, $BC = 4x$ (рис. 6.45).

2) Тогда $P_{ABCD} = 2(3x + 4x) = 2,8$ (м). Отсюда $14x = 2,8$; $x = 0,2$ (м), $AB = CD = 0,6$ м, $BC = AD = 0,8$ м.

Ответ: 0,6 м, 0,8 м, 0,6 м, 0,8 м.

IV. Самостоятельная работа

Решение первой задачи оформлять не требуется, достаточно указать номер верного ответа, вычисления можно выполнять на черновике.

1-й вариант

1. В параллелограмме *ABCD* сторона *CD* равна 3 см, диагонали равны 7 см и 4 см, *O* — точка пересечения диагоналей. Чему равен периметр треугольника *AOB*?

Укажите номер правильного ответа:

1) 14 см; 2) 10,5 см; 3) 8,5 см; 4) 9 см.

Ответ: 3.

2. В $\triangle ABC$ $\angle A = 50°$. Из точки, взятой на стороне *BC*, проведены две прямые, параллельные сторонам *AB* и *AC*. Определите вид получившегося четырехугольника и все его углы.

Ответ: Параллелограмм, 50°, 130°, 50°, 130°.

2-й вариант

1. В параллелограмме *ABCD* диагонали равны 8 см и 5 см, сторона *BC* равна 3 см, *O* — точка пересечения диагоналей. Чему равен периметр треугольника *AOD*?

Укажите номер правильного ответа:

1) 16 см; 2) 9,5 см; 3) 10,5 см; 4) 12 см.

Ответ: 2

2. Из точки, взятой на одной из сторон равностороннего треугольника, проведены две прямые, параллельные другим его сторонам. Определите вид получившегося четырехугольника и все его углы.

Ответ: Параллелограмм, 60°, 120°, 60°, 120°.

V. Домашнее задание

Ответить на контрольный вопрос 9, выучить формулировку признака параллелограмма (задача 18). Решить задачи № 15(1), 16(1), 19.

Указания к задачам

15(1). Углы, о которых говорится в условии, не прилежат к одной стороне, так как их сумма не равна 180°. Значит, они являются противолежащими, то есть равны. Ответ: 40°, 140°, 40°, 140°.

16(1). Углы, о которых говорится в условии, не могут быть противолежащими, так как они не равны. Значит, они прилежат к одной стороне, то есть в сумме составляют 180°. Обозначив один

из углов α, а другой $\alpha + 70°$, составим уравнение: $2\alpha + 70° = 180°$. Откуда $\alpha = 55°$. **О т в е т**: 55°, 125°, 55°, 125°.

19. **Р е ш е н и е.**

1) Т.к. AE — биссектриса угла BAD, то $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 6.46).

2) Т.к. $\angle 2$ и $\angle 3$ — внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AE, то $\angle 2 = \angle 3$.

3) ΔABE $\angle 1 = \angle 3$, тогда $AB = BE = 9$ см.

4) Т.к. $BC = AD = 15$ см, то $CE = 15$ см $- 9$ см $= 6$ см.

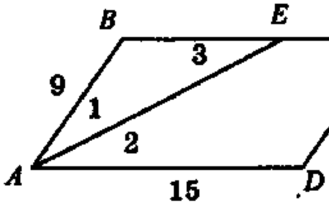


Рис. 6.46

Дополнительные задачи

1. Периметр параллелограмма равен 16 см. Одна из его сторон равна 5 см. Определите остальные стороны параллелограмма.

О т в е т: 3 см, 5 см и 3 см.

2. Одна из сторон параллелограмма на 12 см больше другой. Периметр параллелограмма равен 56 см. Найдите стороны параллелограмма.

О т в е т: 8 см, 20 см.

3. На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки AE и CF. Докажите, что $AFCE$ — параллелограмм.

О т в е т: $AFCE$ — параллелограмм, т.к. отрезки AE и CF параллельны и равны.

4. Дан параллелограмм $ABCD$. Вершина B является серединой отрезка AE, лежащего на луче AB, а вершина C — серединой отрезка DF, лежащего на луче DC. Докажите, что $AEFD$ — параллелограмм.

О т в е т: $AEFD$ — параллелограмм, т.к. отрезки AE и DF параллельны и равны.

Урок 6

ТЕМА: Прямоугольник

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

В пункте вводится определение прямоугольника и доказывается теорема о свойстве диагоналей прямоугольника. В качестве задач сформулированы три признака прямоугольника (см. задачи 24–26). От учащихся не требуется обязательного запоминания этих признаков, однако при решении задач ссылки на них допустимы и существенно укорачивают обоснования.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение прямоугольника, формулировку и доказательство теоремы о свойстве его диагоналей;

уметь воспроизводить определение прямоугольника и доказательство теоремы 6.4, решать задачи на применение изученных сведений о прямоугольнике.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Анализ выполнения самостоятельной работы — 5 мин	
3	Изучение нового материала — 13 мин	Определение прямоугольника, теорема о свойстве его диагоналей. Задачи № 24, 25
4	Решение задач — 15 мин	Задачи № 26, 27 (устно), 29, 32
5	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 10, 11. Задачи № 28, 30

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить решение задач 15(1), 16(1) устно с выполнением рисунков на доске. Задачу 19 проверить с записью решения на доске. При этом следует обратить внимание учащихся на факт, который доказан в ходе решения этой задачи: биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

II. Анализ выполнения самостоятельной работы

Вычислительная часть решения задач самостоятельной работы записывается на доске, обоснования проводятся устно.

III. Изучение нового материала

1. Учащимся сообщается определение прямоугольника.

Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые.

2. Для закрепления определения прямоугольника можно предложить учащимся задачи 24 и 25, подчеркнув, что в них сформулированы признаки прямоугольника, которые можно использовать при решении задач, когда надо обосновать, что рассматриваемый четырехугольник является прямоугольником.

Решить задачу № 24

Задача решается устно с выполнением рисунка и кратких записей на доске:

1) Т.к. $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle A + \angle B = 180°$ (рис. 6.47).

2) Т.к. $\angle A = \angle B$, то $\angle A = \angle B = 90°$.

3) Аналогично $\angle A = \angle D = 90°$ и $\angle B = \angle C = 90°$.

4) В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, значит, $ABCD$ — прямоугольник.

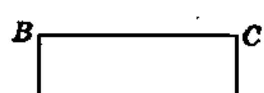


Рис. 6.47

Решить задачу № 25

Докажите, что если в параллелограмме хотя бы один угол прямой, то он является прямоугольником.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $\angle A = 90°$.

Доказать: $ABCD$ — прямоугольник.

Доказательство.

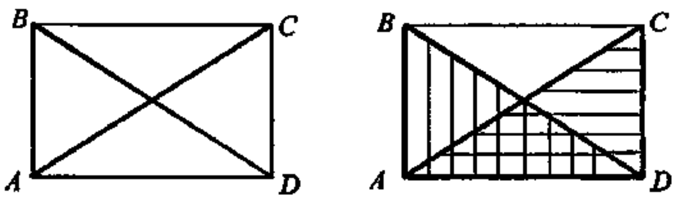
1) Т.к. $ABCD$ — параллелограмм, то $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$ (рис. 6.47).

2) $\angle A$ и $\angle B$ — внутренние односторонние при $AD \parallel BC$ и секущей AB, отсюда $\angle B = 180° - 90° = 90°$.

3) Аналогично $\angle C = 90°$, $\angle D = 90°$.

4) В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, значит, $ABCD$ — прямоугольник.

3. Учащимся сообщается формулировка теоремы о свойстве диагоналей прямоугольника и выполняются рисунок (рис. 6.48, *а*) и краткая запись условия. Чтобы учащимся было легче увидеть рассматриваемые треугольники, можно по ходу доказательства эти треугольники заштриховать (рис. 6.48, *б*).



а) *б)*

Рис. 6.48

Диагонали прямоугольника равны.

Дано: $ABCD$ — прямоугольник.

Доказать: $AC = BD$.

Доказательство.

1) $\Delta BAD = \Delta CDA$ ($AB = CD$ как противолежащие стороны параллелограмма, AD — общая сторона, $\angle BAD = \angle CDA = 90°$).

2) Следовательно, $AC = BD$.

4. После доказательства теоремы 6.4 полезно подвести итог, перечислив все известные теперь учащимся *свойства прямоугольника*. Кроме свойств, характерных только для прямоугольника:

— *диагонали прямоугольника равны*,

— *все углы прямоугольника прямые, он обладает всеми свойствами параллелограмма:*

— *диагонали прямоугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам,*

— *противолежащие стороны прямоугольника параллельны и равны.*

5. Для закрепления свойств прямоугольника можно использовать следующее задание.

Решить задачу

ABCD — прямоугольник (рис. 6.49). Докажите, что ΔAOB — равнобедренный.

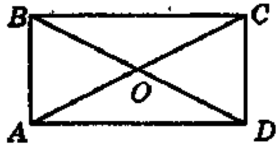


Рис. 6.49

Решение.

$AC = BD$, $AO = OC$, $BO = OD$ (свойства диагоналей прямоугольника). Отсюда $AO = BO$, т.е. ΔAOB — равнобедренный.

IV. Решение задач

Решить задачу № 26.

Учащимся следует сообщить, что в этой задаче сформулирован признак прямоугольника, который можно использовать при решении задач:

Если у параллелограмма диагонали равны, то он является прямоугольником.

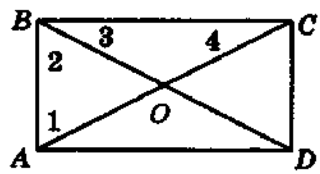


Рис. 6.50

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 6.50); $AC = BD$.

Доказать: $ABCD$ — прямоугольник.

Доказательство.

1) $AC = BD$, $AO = \frac{1}{2}AC$, $BO = \frac{1}{2}BD$ (свойства диагоналей прямоугольника). Тогда $AO = BO = CO$.

2) $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ (углы при основании равнобедренных треугольников).

3) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2(\angle 2 + \angle 3) = 180°$, откуда $\angle ABC = \angle 2 + \angle 3 = 90°$.

4) $ABCD$ — параллелограмм, $\angle B = 90°$, значит, $ABCD$ — прямоугольник.

Решить задачу № 27 (устно)

О т в е т: нужно проверить, равны ли диагонали и делятся ли они точкой пересечения пополам.

Решить задачу № 29

Прежде, чем записать краткое условие задачи, необходимо обсудить, что означают слова «точка отстоит от стороны». Нужно выяснить с учащимися, что здесь речь идет о расстоянии от точки до прямой[1], т.е. о длине перпендикуляра, проведенного из этой точки к прямой.

Дано: $ABCD$ — прямоугольник, $OK \perp AB$, $OM \perp AD$, $OK = OM + 4$ см, $P_{ABCD} = 56$ см (рис. 6.51).

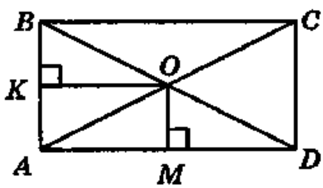


Рис. 6.51

Найти: AB, BC, CD, AD.

Р е ш е н и е.

1) Т.к. $OK \perp AB$, $OM \perp AD$, то $OK \parallel AD$, $OM \parallel AB$.

Тогда $AKOM$ — параллелограмм, $AK = OM$, $AM = OK$.

2) По теореме Фалеса K — середина AB, M — середина AD, тогда $AB = 2AK$, $AD = 2AM$.

3) Обозначим $OM = x$, тогда $OK = x + 4$, $AB = 2x$, $AD = 2x + 8$.

4) $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 56$, откуда $2(2x + 2x + 8) = 56$, $4x + 8 = 28$, $4x = 20$, $x = 5$.

Тогда $AB = CD = 10$ см, $AD = BC = 18$ см.

Решить задачу № 32

Замечание. Перед тем, как решать эту задачу, полезно предложить учащимся устно доказать утверждение: «Если в прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 45°, то треугольник равнобедренный».

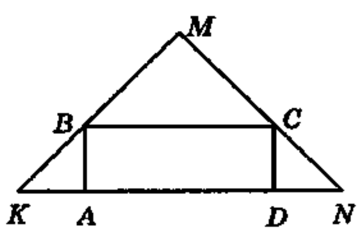


Рис. 6.52

Дано: (рис. 6.52) ΔKMN, $\angle M = 90°$, $KM = MN$, $KN = 45$ см.

---

[1] Вообще говоря, расстояние от точки до отрезка не всегда совпадает с расстоянием от этой точки до прямой, на которой лежит отрезок, но в данном случае это так.

$ABCD$ — прямоугольник, $AD : AB = 5 : 2$ или $AD : AB = 2 : 5$.

Найти: AB, BC, CD, AD.

Решение.

1) В $\triangle KMN$ $\angle K = \angle N = 45°$.

2) В $\triangle AKB$, $\angle A = 90°$, $\angle K = 45°$, тогда $\angle B = 45°$. Значит, $AK = AB$.

Аналогично в $\triangle DNC$ $CD = DN$.

3) $KN = AK + AD + DN = 2AB + AD = 45$ см.

Если $AD = 5x$ и $AB = 2x$, то $4x + 5x = 45$, $x = 5$ (см). Тогда $AB = CD = 10$ см, $AD = BC = 25$ см.

Если $AD = 2x$ и $AB = 5x$, то $10x - 2x = 45$, $x = 3{,}75$ см. Тогда $AB = CD = 18{,}75$ см, $AD = BC = 7{,}5$ см.

V. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 10, 11. Решить задачи № 28, 30.

Указания к задачам

28. Биссектриса угла прямоугольника отсекает от него прямоугольный треугольник с углом 45°, то есть равнобедренный треугольник. Тогда меньшая сторона прямоугольника составляет половину большей стороны. Тогда периметр равен 60 см.

30. Так как радиус, перпендикулярный хорде, делит ее пополам, то $AB = 2\,AK$, $AC = 2\,AM$ (рис. 6.53). $AKOM$ — параллелограмм (см. задачу 29), тогда $AK = OM$, $AM = OK$. Если $OM = 10$ см, а $OK = 6$ см, то $AB = 20$ см, $AC = 12$ см.

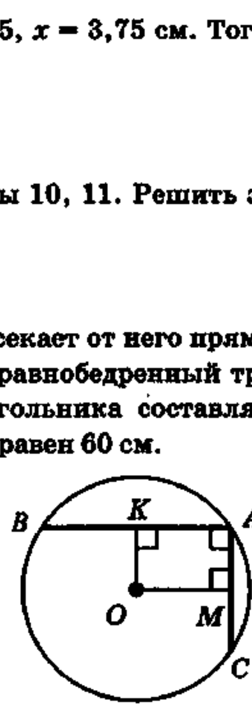


Рис. 6.53

Дополнительные задачи

1. Докажите, что, если в четырехугольнике есть три прямых угла, то он является прямоугольником.

2. Дан прямоугольник $ABCD$, O — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ — равные равнобедренные треугольники.

3. Докажите, что отрезок, соединяющий точку пересечения диагоналей прямоугольника с серединой стороны, перпендикулярен этой стороне.

4. В прямоугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC. Известно, что $\angle BAC$ в 2 раза больше, чем $\angle ACB$. Чему равны эти углы?

5. Из точки E, взятой на стороне BC прямоугольника $ABCD$, опущен перпендикуляр EF на сторону AD. Докажите, что $ABEF$ — прямоугольник.

Урок 7

ТЕМА: Ромб

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

1. В пункте кроме определения ромба и теоремы о свойствах диагоналей ромба сформулированы в качестве задач три признака ромба (см. задачи 33, 34, 36). От учащихся не следует требовать обязательного запоминания этих признаков, однако ссылки на них при решении задач допустимы.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение ромба, свойства его диагоналей;

уметь воспроизводить доказательство теоремы 6.5, применять определение ромба, его свойства и признаки в решении задач.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 10 мин	

№	Этап урока	Содержание работы
2	Изучение нового материала — 10 мин	Определение ромба, свойства его диагоналей
3	Решение задач — 18 мин	Задачи № 37 (устно), 36, 34, 38(1)
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 12, 13. Задачи № 33, 35

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 10, 11, решение задач 28, 30 устно с выполнением рисунков на доске. При разборе решения задачи 28 следует обратить внимание учащихся на факт, который доказан в ходе решения этой задачи: *биссектриса угла прямоугольника отсекает от него равнобедренный треугольник*. При разборе решения задачи 30 следует заметить, что для решения задачи достаточно было доказать, что *АКОМ* — параллелограмм, однако можно было доказать, что этот четырехугольник является прямоугольником. При этом будет доказан еще один признак прямоугольника: *«Если в четырехугольнике три угла прямые, то он является прямоугольником»*.

II. Изучение нового материала

Учащимся сообщается определение ромба.

Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Необходимо отметить, что ромб является параллелограммом по определению, поэтому для него справедливы все свойства параллелограммов.

В качестве упражнений на *применение определения* ромба можно предложить учащимся устно выполнить задания:

Задание 1

Периметр ромба равен 60 см. Определите его стороны.

Ответ: 15 см.

Задание 2

В ромбе ABCD проведена диагональ AC. Определите вид треугольника ABC.

О т в е т: равнобедренный.

Задание 3

Один из углов ромба равен 70°. Определите остальные углы.

О т в е т: 110°, 70°, 110°.

Задание 4

Дан ромб ABCD (рис. 6.54). Диагонали AC и BD равны соответственно 10 см и 6 см. Какова длина отрезков AO и BO?

О т в е т: 5 см и 3 см.

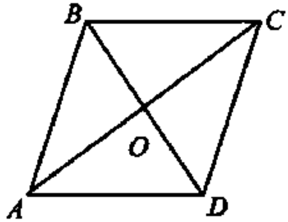


Рис. 6.54

После закрепления определения учащимся сообщается формулировка *теоремы* 6.5, выполняется рисунок (рис. 6.54) и проводится анализ того, что дано и что требуется доказать:

Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

«Пусть $ABCD$ — ромб, а AC и BD — его диагонали. Требуется доказать, что $AC \perp BD$ и каждая диагональ делит соответствующий угол ромба пополам. Докажем, например, что диагональ BD является биссектрисой угла B». Затем на доске выполняется запись:

Дано: $ABCD$ — ромб.

Доказать: $AC \perp BD$, BD — биссектриса угла B.

План доказательства:

1) ΔABC — равнобедренный;

2) BO — медиана в ΔABC;

3) BO — биссектриса и высота в ΔABC.

После того как это утверждение доказано, можно предложить учащимся доказать одно из утверждений: а) DB — биссектриса угла D; б) AC — биссектриса угла A; в) CA — биссектриса угла C.

С целью *закрепления доказанной теоремы* полезно предложить учащимся задание:

Задание 5

В ромбе ABCD $\angle B = 140°$. Найдите углы треугольника AOB (O — точка пересечения диагоналей).

При выполнении рисунка к этой задаче учащимся следует показать удобный способ изображения ромба при решении задач: сначала изображаются диагонали — два перпендикулярных отрезка, пересекающиеся в середине, затем проводятся стороны (рис. 6.55).

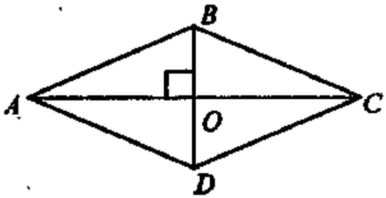


Рис. 6.55

Решение.

1) BO — биссектриса угла ABC (по свойству диагоналей ромба), тогда $\angle ABO = 140° : 2 = 70°$.

2) $AO \perp BO$ (по свойству диагоналей ромба). Тогда $\angle AOB = 90°$, в прямоугольном треугольнике AOB $\angle BAO = 90° - 70° = 20°$.

Ответ: 90°, 70°, 20°.

Аналогично тому, как это делалось для прямоугольника, рассмотренный материал обобщается и перечисляются все свойства ромба: свойства, справедливые для всех параллелограммов:

— *диагонали ромба пересекаются и точкой пересечения делятся пополам,*

— *противолежащие углы ромба равны;*

и свойства, присущие только ромбу:

— *все стороны ромба равны,*

— *диагонали ромба перпендикулярны,*

— *каждая диагональ ромба является биссектрисой его угла.*

III. Решение задач

Решить задачу № 37 (устно с выполнением рисунка на доске)

Решение.

1) Пусть $BD = AB = AD$ (рис. 6.56), тогда ΔABD — равносторонний, в нем все углы равны, значит, они равны по 60°, т.е. $\angle A = 60°$.

2) По свойству углов ромба $\angle C = \angle A = 60°$, $\angle ABC = \angle ADC = 180° - 60° = 120°$.

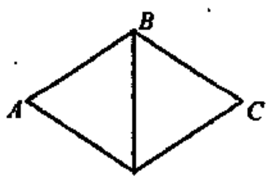


Рис. 6.56

Ответ: 60°, 120°, 60°, 120°.

При решении задач на доказательство признаков ромба (34, 36) продолжается формирование у учащихся умений подводить рассматриваемую фигуру под определение. При этом в задаче 34 данная фигура по условию является параллелограммом, т.е. для решения задачи необходимо доказать выполнение специфического признака, указанного в определении (равенство сторон), а в задаче 36 в условии указан специфический признак, т.е. для подведения под определение требуется доказать, что данная фигура — параллелограмм.

Решить задачу № 36

Дано: $ABCD$, $AB = BC = CD = AD$.

Доказать: $ABCD$ — ромб.

Доказательство.

1) ΔABC и ΔADC равные равнобедренные треугольники (по трем сторонам), значит, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ (рис. 6.57).

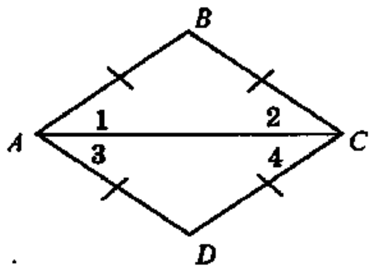


Рис. 6.57

2) $\angle 1$ и $\angle 4$ — внутренние накрест лежащие при прямых AB и CD и секущей AC, $\angle 1 = \angle 4$, значит, $AB \parallel CD$.

3) $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, значит, $ABCD$ — параллелограмм.

4) В параллелограмме $ADCD$ все стороны равны, значит, он является ромбом.

Решить задачу № 34

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, AC — биссектриса угла A.

Доказать: $ABCD$ — ромб.

Доказательство.

1) $\angle 1 = \angle 2$ по условию (рис. 6.57), $\angle 3 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC. Тогда $\angle 1 = \angle 3$.

2) Значит, ΔABC — равнобедренный: $AB = BC$.

3) Т.к. $AB = CD$ и $BC = AD$ (по свойству сторон параллелограмма), то в параллелограмме $ABCD$ все стороны равны, т.е. $ABCD$ — ромб.

Решить задачу № 38(1)

Постройте ромб по углу и диагонали, исходящей из вершины этого угла.

Дано: угол α, отрезок m (рис. 6.58).
Построения (рис. 6.59).

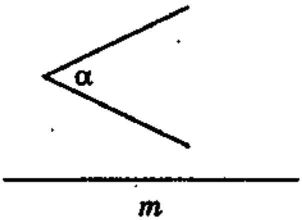


Рис. 6.58

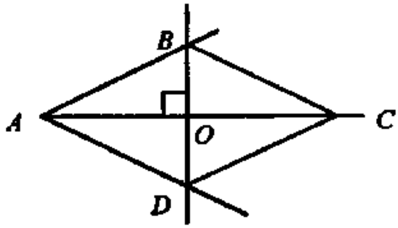


Рис. 6.59

1) Строим $\angle A = \alpha$.

2) Строим биссектрису угла A.

3) Откладываем на биссектрисе отрезок $AC = m$.

4) Строим точку O — середину отрезка AC.

5) Строим прямую, проходящую через точку O и перпендикулярную AC до пересечения со сторонами угла A в точках B и D. Проводим отрезки BC и CD.

6) Т.к. AO — биссектриса и высота треугольника ABD, то ΔABD — равнобедренный, $AB = AD$ и AO — его медиана. Тогда $ABCD$ — параллелограмм (т.к. $AO = OC$ и $BO = OD$), а раз $AB = BC = CD = AD$, то $ABCD$ — ромб.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 12, 13. Решить задачи № 33, 35.

Указания к задачам

33. $\Delta ABO = \Delta CBO$ по двум сторонам и углу между ними (рис. 6.60), откуда $AB = BC$. Тогда в параллелограмме $ABCD$ равны все стороны, т.е. $ABCD$ — ромб.

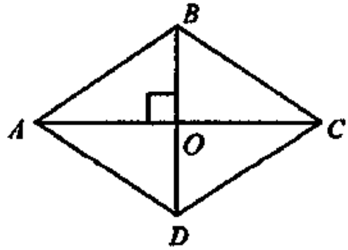


Рис. 6.60

35. Решение.

1) Пусть $\angle BAO = 4x°$, $\angle ABO = 5x°$ (рис. 6.60).

2) По свойству диагоналей ромба $AO \perp BO$, тогда $\angle BAO + \angle ABO = 90°$, $4x + 5x = 90$, $9x = 90$, $x = 10$, $\angle BAO = 40°$, $\angle ABO = 50°$.

3) По свойству диагоналей ромба $\angle BAD = 2\angle BAO = 80°$, $\angle ABC = 2\angle ABO = 100°$.

4) Т.к. противолежащие углы ромба равны, то $\angle BCD = 80°$, $\angle ADC = 100°$.

О т в е т: 80°, 100°, 80°, 100°.

Дополнительные задачи

1. Найдите периметр ромба $ABCD$, если $\angle A = 60°$, $BD = 11$ см.

О т в е т: 44 см.

2. Диагональ AC ромба $ABCD$ образует со стороной AD угол 35°. Определите все углы ромба.

О т в е т: 70°, 110°, 70°, 110°.

3. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и равными радиусами пересекаются в точках A и B. Докажите, что O_1AO_2B — ромб.

Урок 8

ТЕМА: Квадрат

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

На уроке рассматриваются определение квадрата, его свойства, вытекающие из того, что квадрат является частным видом прямоугольника и ромба. В задаче 40 сформулирован признак квадрата.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение квадрата, его свойства;

уметь применять определение квадрата и его свойства в решении задач.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 10 мин	
2	Изучение нового материала — 10 мин	Определение квадрата, его свойства
3	Решение задач — 18 мин	Задачи № 43, 46, 47
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольный вопрос 14. Задачи № 40, 41, 44

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 12, 13. Кроме определения ромба и свойства его диагоналей полезно вспомнить доказанные в задачах признаки ромба.

Решение задач 33, 35 проверяется устно с выполнением рисунков на доске. При разборе решения задачи 35 следует обратить внимание учащихся на прием, который бывает полезен при решении задач, где задано отношение отрезков или углов. В данной задаче углы относятся как 4 : 5, их величины удобно обозначить $4x$ и $5x$.

II. Изучение нового материала

Учащимся сообщается *определение квадрата.*

Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны.

После введения определения квадрата можно задать учащимся вопросы:

Почему квадрат является прямоугольником? Ответ: по определению.

Почему квадрат является параллелограммом? Ответ: так как прямоугольник — это параллелограмм.

Почему квадрат является ромбом? Ответ: так как у него все стороны равны.

После этого необходимо отметить, что раз квадрат является параллелограммом, прямоугольником и ромбом, то для квадрата справедливы все свойства сторон, углов и диагоналей параллелограмма, прямоугольника и ромба. Вместе с учащимися следует вспомнить все эти свойства:

— *противоположные стороны квадрата параллельны;*

— *противоположные стороны квадрата равны;*

— *все углы квадрата равны 90°;*

—*диагонали квадрата равны;*

— *диагонали квадрата пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;*

— *диагонали квадрата делят прямые углы пополам.*

На закрепление определения и свойств квадрата можно предложить задания:

Задание 1 (устно). Периметр квадрата равен 24 см. Чему равна сторона квадрата?

Задание 2 (устно). Диагональ AC квадрата $ABCD$ равна 6 см. Чему равна диагональ BD?

Задание 3 (устно). В квадрате $ABCD$ проведена диагональ AC. Определите вид треугольника ACD и найдите все его углы.

Ответ: ΔACD — равнобедренный и прямоугольный, его углы равны 90°, 45°, 45°.

Задание 4. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Определите вид треугольника AOD и найдите все его углы.

Решение.

1) По свойствам диагоналей прямоугольника $AC = BD$ и $AO = OC$, $BO = OD$ (рис. 6.61). Отсюда $AO = OD$, т.е. ΔAOD — равнобедренный.

2) По свойствам диагоналей ромба $AC \perp BD$, т.е. ΔAOD — прямоугольный.

3) В ΔAOD: $\angle AOD = 90°$, $\angle OAD + \angle ODA = 90°$, $\angle OAD = \angle ODA = 45°$.

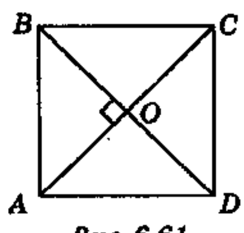


Рис. 6.61

Ответ: ΔAOD — прямоугольный, равнобедренный с углами 90°, 45°, 45°.

III. Решение задач

Решить задачу № 43

Дано: $ABCD$, $KLMN$ — квадраты, $AC = 4$ м, $AB = KM$.

Найти: KL.

Решение.

1) В квадратах $ABCD$ и $KLMN$ ΔAOB и ΔKLM — равнобедренные прямоугольные (доказано в предыдущих задачах). Их острые углы равны 45° (рис. 6.62).

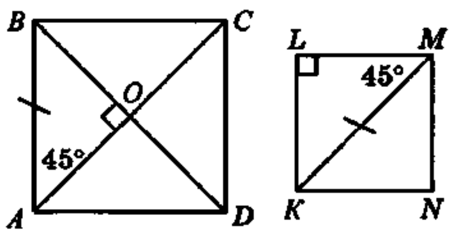


Рис. 6.62

2) $\Delta AOB = \Delta KLM$ по гипотенузе и острому углу, отсюда $KL = AO = \frac{1}{2}AC = 2$ м.

Ответ: 2 м.

Решить задачу № 46

Дано: ΔMPK, $\angle P = 90°$, $MP = PK$, $ABCD$ — квадрат, $MK = 3$ см.

Найти: AB.

Решение.

1) Т.к. $ABCD$ — квадрат, то $AB \perp MK$ и $AB = AD = CD$ (рис. 6.63).

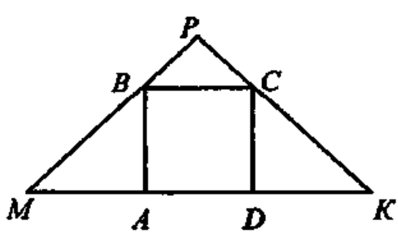


Рис. 6.63

2)ΔMPK — прямоугольный равнобедренный, значит, $\angle M = \angle K = 45°$.

3) ΔABM и ΔCDK — прямоугольные равнобедренные, т.к. $\angle M = \angle B = \angle K = \angle C = 45°$, значит, $MA = AB = AD = DK$. Тогда $AB = MK : 3 = 1$ см.

О т в е т: 1 см.

Решить задачу № 47

Дано: CA и CB — касательные, $CA \perp CB$, $OA = 10$ м (рис. 6.64).

Найти: CA и CB.

Р е ш е н и е.

1) Т.к. CA и CB — касательные, то $OA \perp CA$, $OB \perp CB$.

2) Т.к. $\angle A = \angle B = \angle C = 90°$, то $OACB$ — прямоугольник.

3) Т.к. $OA = OB$, то $AC = OA = CB = OB$, т.е. $OACB$ — квадрат, значит, $CA = CB = 10$ м.

О т в е т: 10 м.

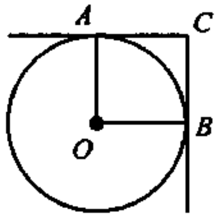


Рис. 6.64

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольный вопрос 14. Решить задачи № 40, 41, 44.

Указания к задачам

40. Прямоугольник является параллелограммом, а если его диагонали перпендикулярны, то он является ромбом. Значит, в данном прямоугольнике все стороны равны, то есть он является квадратом.

41. В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC $\angle A = \angle B = 45°$ (рис. 6.65). Тогда ΔMBP и ΔAKP тоже прямоугольные равнобедренные, т.е. $MP = MB$ и $AK = PK$. Тогда $P_{CMPK} = BC + AC = 4$ м.

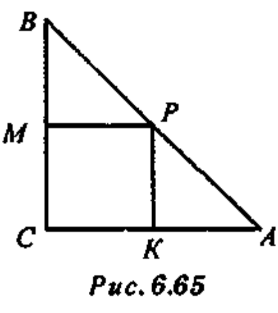


Рис. 6.65

44. $\Delta AOB = \Delta KNM$ по гипотенузе и острому углу (рис. 6.66), отсюда $MN = AO = \frac{1}{2}AC$, тогда $AC = 2$ м.

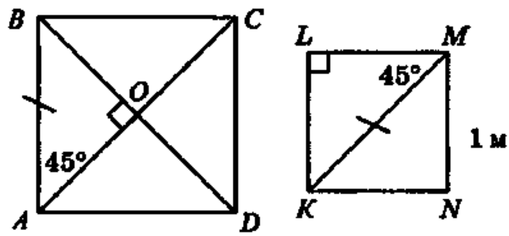


Рис. 6.66

Дополнительные задачи

1. В окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AC и BD. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

2. Постройте квадрат по его диагонали.
Дано: отрезок a.
Построить: квадрат $ABCD$, где $AC = a$.
Построения.
1) На произвольной прямой строим отрезок $AC = a$ (рис. 6.67).

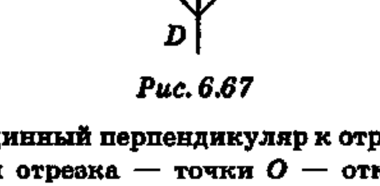


Рис. 6.67

2) Строим серединный перпендикуляр к отрезку AC.

3) От середины отрезка — точки O — откладываем отрезки $OB = OD = OA$.

4) Т.к. по построению ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD, ΔAOD — равные прямоугольные равнобедренные треугольники, то их гипотенузы равны, а все острые углы равны 45°. Тогда $ABCD$ — ромб с прямыми углами, т.е. является квадратом. Его диагональ по построению равна a.

Урок 9

ТЕМА: Решение задач

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 10 мин	
2	Обобщение изученных сведений — 10 мин	Повторение свойств и признаков параллелограмма, ромба, прямоугольника и квадрата
3	Решение задач — 18 мин	Решить задачи № 10, 13 (устно), 15(2), 23(1)
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 6–14 (без доказательства). Задачи № 15(3), 16(3), 23(2)

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопрос 14. Кроме определения квадрата и перечисления его свойств полезно вспомнить, что квадрат является частным случаем ромба и прямоугольника.

Решение задач 40 и 41 проверяется устно с выполнением рисунков на доске. При разборе решения задачи 44 можно обратить внимание учащихся на факты, которые часто применяются в решении задач, связанных с квадратом: в равнобедренном прямоугольном треугольнике острые углы равны по 45° и обратно — если в прямоугольном треугольнике острый угол равен 45°, то это равнобедренный треугольник.

II. Обобщение изученных сведений о параллелограмме и его видах

1. На заключительном этапе изучения параграфа целесообразно *систематизировать сведения о параллелограмме и его ча-*

стных видах. Это можно сделать в форме беседы, в процессе которой следует:

— повторить все свойства параллелограмма;

— вспомнить, что прямоугольник, ромб и квадрат являются параллелограммами и, значит, обладают всеми свойствами параллелограмма;

— повторить характерные свойства частных видов параллелограмма:

а) перпендикулярность сторон и равенство диагоналей прямоугольника и квадрата;

б) перпендикулярность диагоналей и равенство сторон квадрата и ромба;

в) диагонали ромба и квадрата являются биссектрисами их углов;

— подчеркнуть, что квадрат, являясь параллелограммом, прямоугольником, ромбом, обладает всеми их свойствами.

По ходу беседы можно схематически зафиксировать повторяемые сведения (см., например, рис. 6.68).

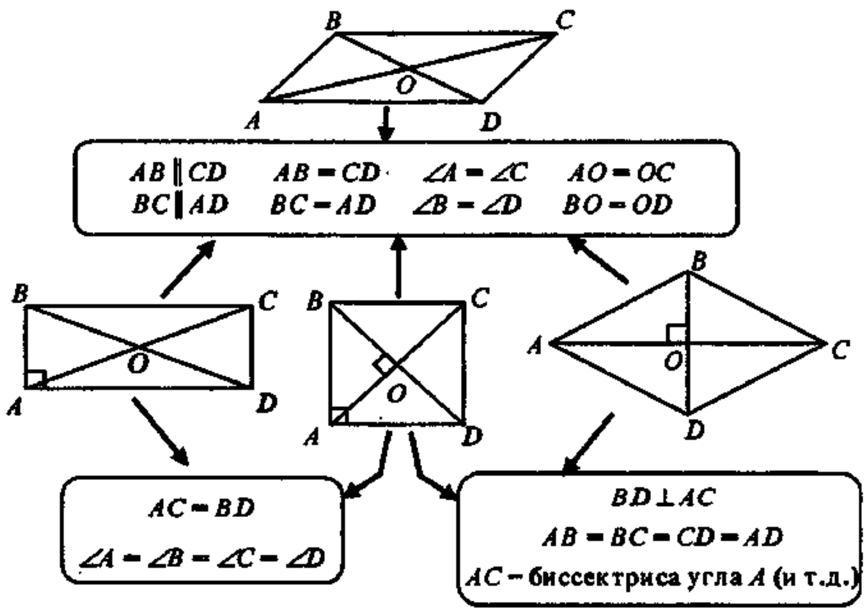


Рис. 6.68

2. Следует иметь в виду, что учащимся гораздо труднее дается применение *признаков фигур*, чем использование их свойств. Поэтому представляется важным не только повторить рассматривавшиеся в определениях, теоремах и задачах признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба и квадрата, но и обратить внимание учащихся на различие в применении свойств и признаков:

— если по условию задачи дано, что четырехугольник является параллелограммом (или прямоугольником, или ромбом, или квадратом), то можно использовать в решении любое его свойство;

— признаки используются, когда нужно доказать, что данный четырехугольник является параллелограммом (прямоугольником, квадратом или ромбом). При этом нужно привести определенный набор фактов, достаточных для того, чтобы сделать вывод о виде четырехугольника.

Признаки параллелограмма

Если в четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, то $ABCD$ — параллелограмм.

Если в четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O, $AO = OC$ и $BO = OD$, то $ABCD$ — параллелограмм.

Если в четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, то $ABCD$ — параллелограмм.

Признаки прямоугольника

Если в параллелограмме $ABCD$ один из углов равен 90°, то $ABCD$ — прямоугольник.

Если в параллелограмме $ABCD$ $AC = BD$, то $ABCD$ — прямоугольник.

Если в четырехугольнике $ABCD$ три угла равны по 90°, то $ABCD$ — прямоугольник.

Признаки ромба

Если в параллелограмме $ABCD$ $AC \perp BD$, то $ABCD$ — ромб.

Если в параллелограмме $ABCD$ диагональ является биссектрисой угла, то $ABCD$ — ромб.

Если в четырехугольнике $ABCD$ все стороны равны, то $ABCD$ — ромб.

Признаки квадрата

Для того чтобы *доказать, что данный четырехугольник является квадратом*, можно:

а) доказать, что четырехугольник является прямоугольником с равными сторонами;

б) доказать, что четырехугольник является ромбом с прямыми углами.

В качестве примера можно рассмотреть следующую задачу:

Определите вид четырехугольника ABCD, если AC и BD — диаметры одной окружности.

Здесь на основании того, что диагонали рассматриваемого четырехугольника, пересекаясь, делятся пополам, можно сделать вывод о том, что он является параллелограммом, а затем из равенства диагоналей — вывод о том, что он является прямоугольником.

3. С целью подготовки к контрольной работе полезно провести *повторение изученного материала* в ходе решения задач.

Решить задачу № 10

Решение.

1) $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 2(AB + AD)$, т.к. противоположные стороны параллелограмма равны (рис. 6.69). Тогда $AB + AD = 5$ см.

2) $P_{ABD} = AB + BD + AD$, тогда $BD = 8 - 5 = 3$ (см).

Ответ: 3 см.

Рис. 6.69

Решить задачу № 13 (устно)

Ответ: Нет, т.к. второй должен быть равен первому (если это углы противолежащие) или составлять с ним в сумме 180° (если они прилежат к одной стороне).

Решить задачу № 15(2)

Решение.

1) Рассмотрим параллелограмм *ABCD* (рис. 6.69). Данные два угла не могут прилежать к одной стороне, т.к. их сумма не равна 180°. Значит, это противолежащие углы *A* и *C*, тогда $\angle A = \angle C = 100° : 2 = 50°$.

2) $\angle A + \angle B = 180°$ (как соседние углы параллелограмма), тогда $\angle B = 180° - 50° = 130°$.

3) $\angle D = \angle B$ (как противолежащие углы параллелограмма), тогда $\angle D = 130°$.

О т в е т: 50°, 130°, 50°, 130°.

Решить задачу 23(1)

Дано: отрезки a, b, угол α (рис. 6.70).

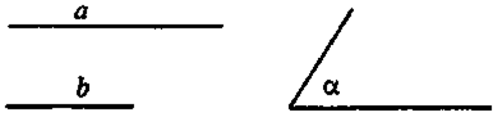


Рис. 6.70

Построить: параллелограмм $ABCD$, где $AB = a$, $BC = b$, $\angle B = \alpha$.

Построение.

1) Строим треугольник ABC по двум сторонам $AB = a$ и $BC = b$ и углу между ними $\angle B = \alpha$ (рис. 6.71).

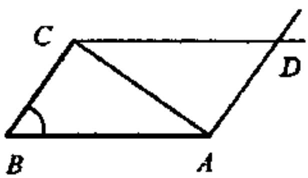


Рис. 6.71

2) Через точки A и C проводим прямые, параллельные AB и BC до пересечения в точке D.

3) $ABCD$ — искомый параллелограмм, т.к. $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AB = a$, $BC = b$, $\angle B = \alpha$.

IV. Домашнее задание

Повторить контрольные вопросы 6–14 (без доказательства). Решить задачи № 15(3), 16(3), 23(2).

Указания к задачам

23(2). Построить треугольник AOB по двум сторонам AO и BO (равным половинам данных отрезков) и углу между ними (равному данному углу). На продолжении отрезков AO и BO отложить отрезки $OC = AO$ и $OD = BO$ (рис. 6.72). $ABCD$ — параллелограмм (по признаку параллелограмма) и его диагонали равны данным отрезкам, а угол между ними равен данному углу.

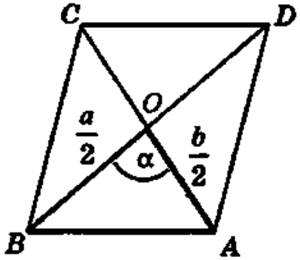


Рис. 6.72

Дополнительные задачи

1. Докажите, что в ромбе $ABCD$ высоты BH и BK равны.

2. В ромбе $ABCD$ угол A в 4 раза больше угла B. Найдите углы треугольника ABD.

Ответ: 36°, 72°, 72°.

Урок 10

ТЕМА: Решение задач

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 10 мин	
2	Решение задач — 28 мин	Задачи № 31, 42, 39(1), 38(2)
3	Домашнее задание — 2 мин	Задачи № 21, 39(2), 45

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 6–14 (формулировки) в ходе фронтального устного опроса.

Решение задач 23(2) проверяется устно с выполнением рисунка на доске.

II. Решение задач

Решить задачу № 31

Решение *(рис. 6.73)*.

1) ΔABC: $AB = AC$, $\angle A = 90°$, значит, $\angle B = \angle C = 45°$.

2) $AKLM$ — прямоугольник, значит, $\angle M = \angle K = 90°$.

3) ΔCML и ΔKBL: $\angle CLM = 90° - 45° = 45°$ и $\angle BLK = 45°$, тогда $CM = ML$ и $BK = KL$.

4) $P_{AKLM} = AK + KL + ML + AM = AK + KB + CM + AM = AB + AC = 12$ см.

Ответ: 12 см.

Рис. 6.73

Решить задачу № 42

Решение (рис. 6.74).

1) Т.к. $ABCD$ — квадрат и $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$, то $BA_1 = CB_1 = DC_1 = AD_1$.

2) $\Delta AA_1D_1 = \Delta BB_1A_1 = \Delta CC_1B_1 = \Delta DD_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = A_1D_1$, т. е. $A_1B_1C_1D_1$ — ромб.

3) Т.к. $\Delta AA_1D_1 = \Delta BB_1A_1$, то $\angle AA_1D_1 = \angle BB_1A_1$, тогда $\angle AA_1D_1 + \angle BA_1B_1 = 90°$, $\angle B_1A_1D_1 = 180° - 90° = 90°$.

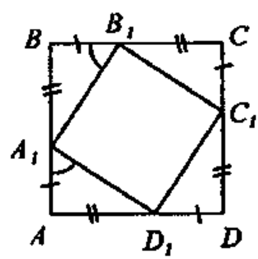


Рис. 6.74

4) $A_1B_1C_1D_1$ — ромб и у него $\angle A_1 = 90°$, значит, $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник с равными сторонами, т. е. квадрат.

Решить задачу № 39(1)

Дано: отрезки a и b (рис. 6.75).

Построить: ромб $ABCD$, где $AB = a$, $AC = b$.

Построение.

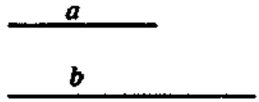


Рис. 6.75

1) Строим ΔABC по трем сторонам: $AB = BC = a$, $AC = b$.

2) Через точки A и C проводим прямые, параллельные AB и BC до пересечения в точке D (рис. 6.76).

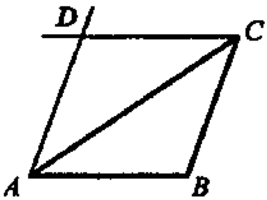


Рис. 6.76

3) $ABCD$ — искомый ромб, т.к. $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, все его стороны равны a, а диагональ AC равна b.

Решить задачу № 38(2)

Дано: отрезок m и угол α (рис. 6.77).

Построить: ромб $ABCD$, где $AC = m$, $\angle ABC = \alpha$.

Рис. 6.77

Поскольку стороны ромба равны, то ΔABC — равнобедренный с основанием AC, тогда $\angle A = \angle C = (180° - \angle B) : 2 = 90° - \frac{1}{2}\angle B$.

Построение (рис. 6.78).

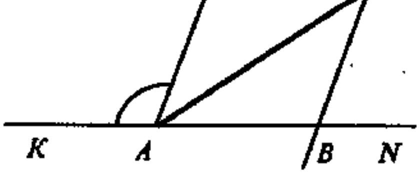


Рис. 6.78

1) Построить $\angle KAM = \alpha$, затем $\angle MAN$, смежный с $\angle KAM$.

2) Построить биссектрису угла MAN.

3) Отложить на биссектрисе отрезок $AC = m$.

4) Через точку C провести прямые, параллельные AM и AN до пересечения с лучом AM в точке D и с лучом AN в точке B.

5) $ABCD$ — параллелограмм (т.к. $AB \parallel CD$ и $BC \parallel DA$) и AC — биссектриса угла A, значит, $ABCD$ — ромб. $\angle ABC = \angle KAM = \alpha$ как соответственные при $BC \parallel DA$ и секущей AB.

IV. Домашнее задание

Решить задачи № 21, 39(2), 45.

Указания к задачам

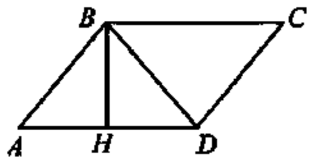


Рис. 6.79

21. В треугольнике ABD высота BH является медианой (рис. 6.79), значит, $AB = BD$. $P_{ABCD} = 2\,AB + 2\,AD = 3{,}8$ м; $P_{ABD} = 2\,AB + AD = 3$ м; тогда $AD = 0{,}8$ м, $AB = (3 - 0{,}8) : 2 = 1{,}1$ (м).

39(2). Построить отрезок AC, равный одному из данных отрезков, затем серединный перпендикуляр к отрезку AC, на нем отложить в обе стороны от середины отрезки OB и OD, равные половине другого данного отрезка. $ABCD$ — искомый ромб (т.к. его диагонали пересекаются в общей середине и перпендикулярны).

45. Сначала, используя то, что прямоугольный треугольник с углом 45° является равнобедренным, нужно доказать, что сумма двух сторон прямоугольника равна данной диагонали квадрата (рис. 6.80), затем решить уравнение $x + 2x = 12$, где x — длина меньшей стороны прямоугольника.

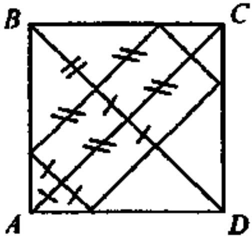


Рис. 6.80

Дополнительные задачи

1. Одна из сторон прямоугольника на 3 см больше другой. Найдите стороны прямоугольника, если его периметр равен 18 см.

Ответ: 3 см и 6 см.

2. В ромбе $ABCD$ $\angle ABD$ в 5 раз больше, чем $\angle BAC$. Найдите углы ромба.

Ответ: 30° и 150°.

3. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 16 см. Найдите сумму расстояний от точки M (рис. 6.81, *а*) до всех его сторон.

Указание. Провести через точку M прямые, перпендикулярные сторонам прямоугольника (рис. 6.81, *б*). Сумма расстояний от точки M до сторон прямоугольника равна сумме двух его соседних сторон, то есть половине периметра.

Ответ: 8 см.

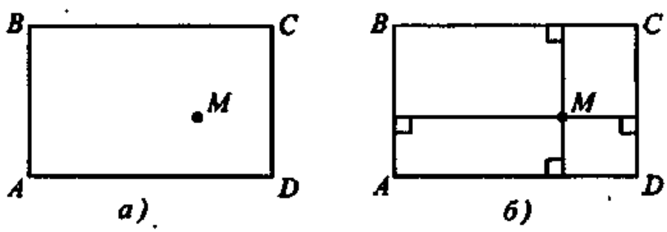


Рис. 6.81

Урок 11

ТЕМА: Контрольная работа № 1

Вариант 1

1*. Периметр параллелограмма равен 16 см. Чему равны стороны параллелограмма, если известно, что одна его сторона в 3 раза больше другой? [Ответ: 2 см и 6 см]

2*. В ромбе $ABCD$ $\angle D = 140°$. Определите углы треугольника AOD (O — точка пересечения диагоналей). [Ответ: 20°, 70°, 90°]

3. На диагонали MP прямоугольника $MNPQ$ отложены равные отрезки MA и PB (рис. 6.82). Докажите, что $ANBQ$ — параллелограмм.

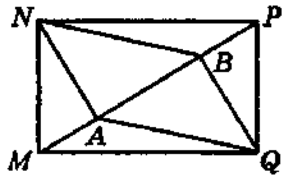


Рис. 6.82

Вариант 2

1*. Одна из сторон параллелограмма в 4 раза больше другой, а его периметр равен 30 см. Чему равны стороны параллелограмма? [О т в е т: 3 см и 12 см]

2*. В ромбе $MNPQ$ $\angle N = 100°$. Определите углы треугольника MON (O — точка пересечения диагоналей). [О т в е т: 40°, 50°, 90°]

3. На продолжении диагонали AC прямоугольника $ABCD$ отложены равные отрезки AM и CK (рис. 6.83). Докажите, что $MBKD$ — параллелограмм.

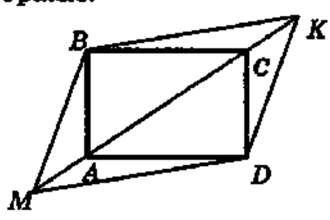


Рис. 6.83

Урок 12

ТЕМА: Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Теорема Фалеса, необходимая для доказательства свойств средней линии треугольника и средней линии трапеции, носит в данном курсе вспомогательный характер, поэтому усвоения ее доказательства и детальной отработки ее применения не требуется. Достаточно будет ознакомить учеников со смыслом утверждения этой теоремы и с примерами ее применения, а при наличии времени и желании учителя — и с доказательством.

Свойства средней линии треугольника достаточно широко используются в решении задач как в курсе планиметрии, так и в курсе стереометрии, а также в задачах вступительных экзаменов в вузы. Поэтому при изучении этого материала необходимо добиться его прочного усвоения.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение средней линии треугольника и ее свойства.

уметь применять теорему Фалеса для деления отрезка на несколько равных частей, использовать определение средней линии треугольника для ее распознавания и применять свойства средней линии треугольника в решении несложных задач.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Анализ контрольной работы — 8 мин	
2	Изучение нового материала — 15 мин	Теорема Фалеса. Деление отрезка на несколько равных частей. Определение и свойства средней линии треугольника
3	Решение задач — 15 мин	Задачи № 49 (2), 48 (устно), 52, 54
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 15, 16. Задачи № 49 (3), 50

ХОД УРОКА

I. Анализ контрольной работы

Задачи контрольной работы, которые вызвали затруднения у учащихся, необходимо решить, отметив наиболее часто встречавшиеся ошибки в решении.

II. Изучение нового материала

1. Рассмотрение *теоремы Фалеса* можно начать с разбора формулировки:

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

По ходу рассмотрения формулировки выполняем рисунок (рис. 6.84, *а*) и краткую запись теоремы.

Дано: $A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$.

Доказать: $B_1B_2 = B_2B_3$.

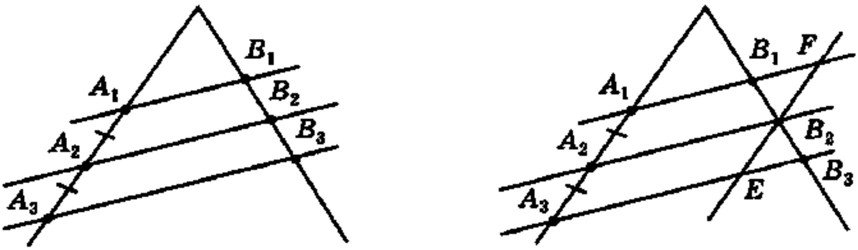


Рис. 6.84

После того, как выяснено, что дано и что требуется доказать, рисунок дополняется построением: через точку B_2 проводится прямая $EF \parallel A_1A_3$ (рис. 6.84, *б*). Для того чтобы мотивировать дополнительное построение, можно сказать учащимся, что эта прямая проведена для получения параллелограммов $A_2A_1FB_2$ и $A_3A_2B_2E$. Далее доказательство проводится в соответствии с текстом учебника.

Основные этапы доказательства можно записать в виде плана:

1) $A_2A_1FB_2$ и $A_3A_2B_2E$ — параллелограммы, $B_2F = B_2E$;

2) $\angle B_1B_2F = \angle B_3B_2E$ (вертикальные), $\angle B_1FB_2 = \angle B_3EB_2$ (внутренние накрест лежащие при $A_1B_1 \parallel A_3B_3$ и секущей EF;

3) $\Delta B_1FB_2 = \Delta B_3EB_2$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам);

4) $B_1B_2 = B_3B_2$.

Для *закрепления теоремы Фалеса* можно использовать следующие задания по готовым рисункам:

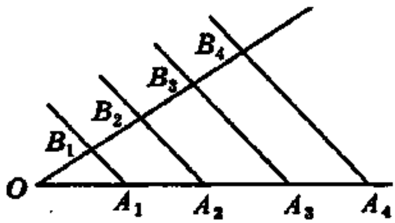


Рис. 6.85

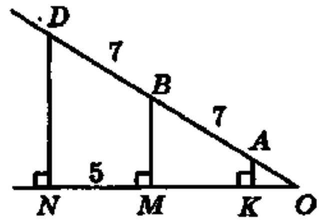


Рис. 6.86

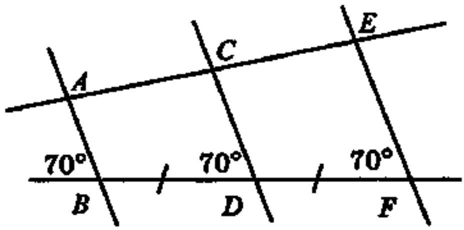


Рис. 6.87

Задание 1 **(по рис. 6.85)**

Дано: $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OB_4 = 28$ см

Найти: OB_1, OB_2, OB_3.

Ответ: $OB_1 = 7$ см, $OB_2 = 14$ см, $OB_3 = 21$ см.

Задание 2 **(по рис. 6.86)**

Чему равен отрезок МК?

Ответ: 5.

Задание 3 **(по рис. 6.87)**

Чему равен отрезок АС, если АЕ = 22 см?

Ответ: Прямые AB, CD и EF параллельны, так как соответственные углы равны. По теореме Фалеса $AC = AE : 2 = 11$ см.

При выполнении последнего задания нужно обсудить *замечание* к теореме Фалеса, приведенное в учебнике, а именно другую формулировку теоремы Фалеса:

Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной прямой равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой.

2. Определение средней линии треугольника.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Закрепление определения проводится с помощью устных упражнений, направленных на распознавание средней линии треугольника:

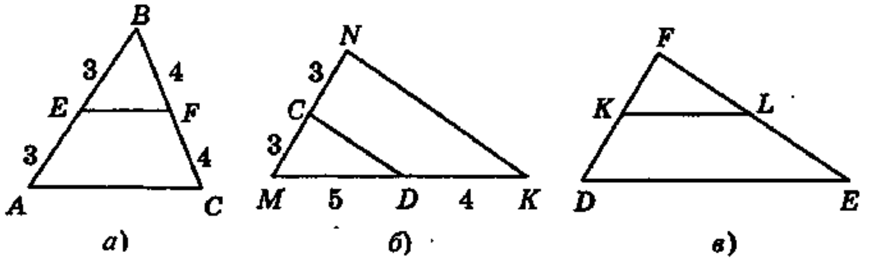


Рис. 6.88

Задание 4

Является ли отрезок EF средней линией треугольника ABC (рис. 6.88, а)?

О т в е т: Да.

Задание 5

Является ли отрезок CD средней линией треугольника MNK. (рис. 6.88, б)?

О т в е т: Нет.

Задание 6

KL — средняя линия треугольника DFE, DF = 10 см, FE = = 12 см. Чему равны отрезки DK, KF, FL, LE (рис. 6.88, в)?

О т в е т: 5 см, 5 см, 6 см, 6 см.

Задание 7

Изобразите произвольный треугольник. Постройте среднюю линию этого треугольника.

Примечание. Полезно указать различные способы деления отрезка пополам: способ, известный из курса VII класса, и способ, использующий теорему Фалеса. При втором способе (рис. 6.89)

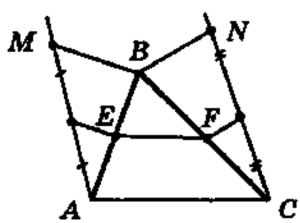


Рис. 6.89

можно построить вспомогательные лучи AM и CN, отложить на них равные между собой отрезки и, дважды применив теорему Фалеса, найти середины сторон AB и BC.

3. Доказательство теоремы о средней линии треугольника.

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Дано: ΔABC, DE — средняя линия (рис. 6.90, *а*).

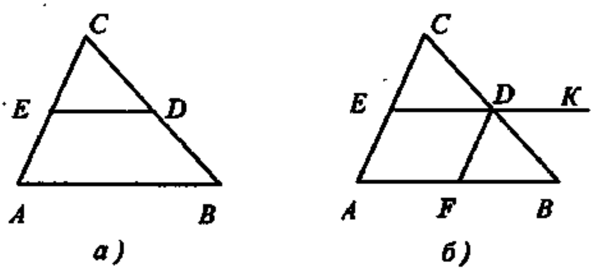


Рис. 6.90

Доказать: $DE \parallel AB$, $DE = \frac{1}{2}AB$.

Доказательство.

1) Проведем $EK \parallel AB$ (рис. 6.90, *б*), тогда по теореме Фалеса EK пройдет через точку D. Значит, $DE \parallel AB$, т.е. первая часть теоремы доказана.

2) Проведем среднюю линию DF. По доказанному $DF \parallel AC$.

3) $AEDF$ — параллелограмм, значит, $AF = DE$, но $AF = FB$ (т.к. DF — средняя линия), значит, $DE = \frac{1}{2}AB$.

4. Закрепление свойств средней линии треугольника можно провести с помощью следующих устных упражнений.

Задание 8

На рис. 6.91 DE — средняя линия треугольника ABC. Найдите стороны треугольника ABC, если DC = 3 см, DE = = 5 см, CE = 6 см.

О т в е т: 6 см, 10 см, 12 см.

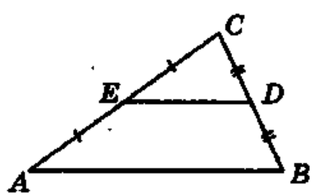


Рис. 6.91

Задание 9

AM и BK — медианы треугольника ABC, отрезок MK равен 12 см (рис. 6.92). Найдите сторону AB.

О т в е т: 24 см.

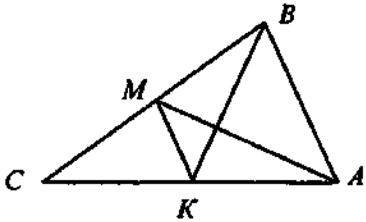


Рис. 6.92

III. Решение задач

Решить задачу № 49 (2)

Разделите данный отрезок на пять равных частей.

Дано: отрезок AB.

Разделить отрезок AB на пять равных частей.

Р е ш е н и е:

1) На луче AC отложить $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5$ (рис. 6.93).

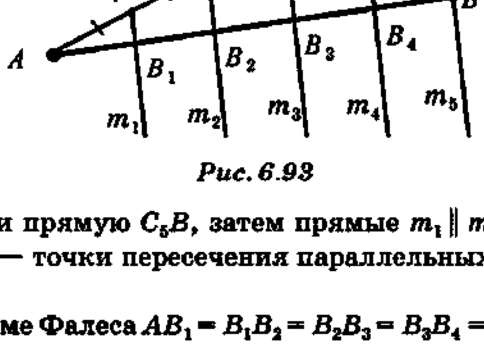


Рис. 6.93

2) Провести прямую C_5B, затем прямые $m_1 \parallel m_2 \parallel m_3 \parallel m_4 \parallel C_5B$, B_1, B_2, B_3, B_4 — точки пересечения параллельных прямых с прямой AB.

3) По теореме Фалеса $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$.

Решить задачу № 48 (устно)

Решение задачи можно провести как обобщение решения предыдущей задачи: деление отрезка на любое число равных частей выполняется таким же способом, но на луче AC откладываются n равных отрезков и проводятся n параллельных прямых.

Здесь можно напомнить учащимся, что раньше они изучали способ деления отрезка на две равные части (т.е. возможность деления и на четыре части, восемь частей и т. д.), а применение теоремы Фалеса дает способ деления отрезка на любое число равных частей.

Решить задачу № 52

Решение:

1) Т.к. MK — средняя линия (рис. 6.94), то $AC = 2MK = 6$ см.

2) $P_{ABC} = 2AB + 6 = 16$, откуда $AB = BC = 5$ (см).

Ответ: 5 см, 5 см, 6 см.

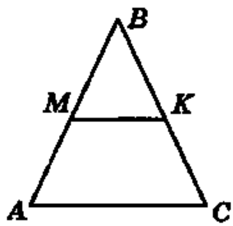


Рис. 6.94

Решить задачу № 54

Дано: ΔABC, $AM = BM$, $BK = KC$.

Доказать: A, B, C равноудалены от прямой MK.

Решение.

1) Проведем $AD \perp MK$, $BP \perp MK$, $CE \perp MK$ (рис. 6.95). Расстояния от вершин до прямой MK — это длины отрезков BO, AD и CE.

2) Т.к. M и K — середины сторон, то MK — средняя линия, значит, $MK \parallel AC$, тогда по теореме Фалеса $BO = OP$.

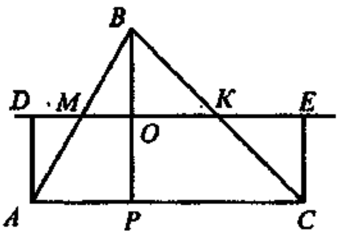


Рис. 6.95

3) Т.к. $ADOP$ и $POEC$ — прямоугольники, то $AD = OP = CE$. Отсюда $BO = AD = CE$.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 15, 16. Решить задачи № 49 (3), 50.

Указания к задачам

50. Искомые стороны — это средние линии треугольника, они равны 4 см, 5 см и 6 см.

Дополнительные задачи

1. (По рис. 6.96, *а*) Чему равен отрезок CD, если секущие BM, CP и DK параллельны?

Ответ: 12 см.

Указание. Необходимо выполнить дополнительное построение: провести через точки, делящие отрезок PK на три равные части, прямые, параллельные секущим (рис. 6.96, *б*).

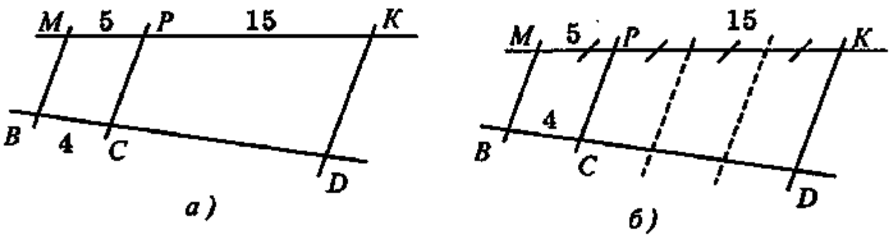


Рис. 6.96

2. Докажите, что отрезок, соединяющий середины двух соседних сторон прямоугольника, параллелен одной из диагоналей. Определите длину этого отрезка, если диагональ равна 10 см.

Ответ: По свойству средней линии треугольника искомый отрезок параллелен диагонали, соединяющей концы рассматриваемых соседних сторон, и равен 5 см.

3. Как разделить данный отрезок AB точкой C так, чтобы отрезок AC был в 2 раза больше отрезка CB?

Ответ: Нужно разделить отрезок на три равные части, тогда AC — отрезок, состоящий из двух частей, CB — из одной части.

4. В параллелограмме $ABCD$ сторона BC разделена на три равных отрезка. Через каждую точку деления проведены две прямые, параллельные диагоналям параллелограмма. Докажите, что эти прямые делят стороны AB и CD на отрезки одинаковой длины.

Указание. Используется теорема Фалеса (рис. 6.97).

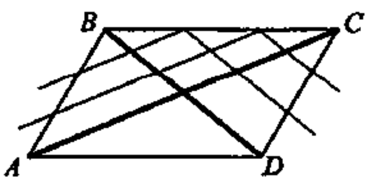


Рис. 6.97

5. Постройте отрезок, равный $\frac{3}{7}$ данного отрезка MK.

Указание. Нужно разделить отрезок на семь равных частей и взять три части.

Урок 13

ТЕМА: Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение средней линии треугольника и ее свойства;

уметь применять определение и свойства средней линии треугольника в решении задач.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 8 мин	
2	Решение задач — 20 мин	Задачи № 53, 55, 57
3	Самостоятельная работа — 10 мин	
4	Домашнее задание — 2 мин	Задачи № 51, 56

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 15, 16, решение задач 49(3) и 50 устно с выполнением рисунков на доске.

II. Решение задач

Решить задачу № 53

Полезно сначала провести анализ условия задачи. Пусть даны точки M, P и K. Так как они должны быть серединами сторон искомого треугольника, то отрезки MP, PK и MK должны в нем быть средними линиями, параллельными сторонам. Значит, построение будет заключаться в проведении через точки M, P и K прямых, параллельных отрезкам MP, PK и MK. Искомый треугольник будет иметь вершинами точки пересечения этих прямых (рис. 6.98).

Доказательство заключается в обосновании того, что $AMPK$, $MPCK$, $MBPK$ — параллелограммы, откуда, используя равенство противолежащих сторон, можно сделать вывод о том, что точки M, P и K — середины сторон треугольника ABC.

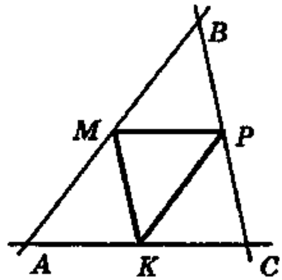


Рис. 6.98

Решить задачу № 55

Дано: четырехугольник $ABCD$, E, F, G, H — середины сторон (рис. 6.99).

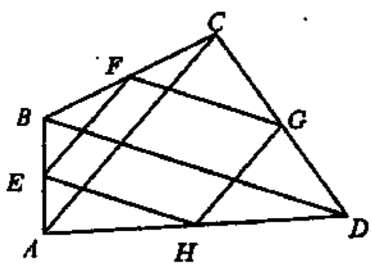


Рис. 6.99

Доказать: $EFGH$ — параллелограмм.

Доказательство:

1) ΔABC: т.к. EF — средняя линия, то $EF \parallel AC$,

ΔACD: т.к. GH — средняя линия, то $GH \parallel AC$, отсюда $EF \parallel GH$.

2) ΔABD: т.к. EH — средняя линия, то $EH \parallel BD$,

ΔBCD: т.к. FG — средняя линия, то $FG \parallel BD$, отсюда $EH \parallel FG$.

3) Т.к. $EF \parallel GH$, $EH \parallel FG$, то $EFGH$ — параллелограмм.

Замечание. При решении задачи 55 полезно дополнительно отметить, что каждая из противолежащих сторон построенного параллелограмма равна половине, соответствующей диагонали: $EF = GH = \frac{1}{2} AC$, $EH = FG = \frac{1}{2} BD$. Этот факт используется в задачах 56 и 57 для вычисления сторон параллелограмма и его периметра, а в задаче 58 для доказательства того, что в построенном параллелограмме все стороны равны.

Решить задачу № 57

Дано: четырехугольник $ABCD$, E, F, G, H — середины сторон (рис. 6.99), $AC = a$, $BD = b$.

Найти: P_{EFGH}.

Решение.

1) ΔABC: т.к. EF — средняя линия, то $EF = \frac{1}{2} AC$.

2) ΔACD: т.к. GH — средняя линия, то $GH = \frac{1}{2} AC$.

3) ΔABD: т.к. EH — средняя линия, то $EH = \frac{1}{2} BD$.

4) ΔBCD: т.к. FG — средняя линия, то $FG = \frac{1}{2} BD$.

5) $P_{EFGH} = \frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} BD + \frac{1}{2} BD = AC + BD = a + b$.

III. Самостоятельная работа

Вариант 1

1. В треугольнике ABC даны стороны: $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 9$ см. Найдите длину отрезка MK, где M и K — середины сторон AB и BC.

Укажите верный ответ: 1) 2,5 см 2) 4,5 см 3) 3,5 см 4) 6 см

Ответ: 2.

2. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 8 см, основание равно 12 см. Через середину боковой стороны проведена прямая, параллельная основанию. Найдите периметр отсекаемого при этом четырехугольника.

Ответ: 26 см.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC даны стороны: $AB = 7$ см, $BC = 9$ см, $AC = 11$ см. Найдите длину отрезка EH, где E и H — середины сторон AC и BC.

Укажите верный ответ: 1) 5,5 см 2) 4,5 см 3) 3,5 см 4) 5 см

О т в е т: 3,5 см.

2. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 12 см, основание равно 8 см. Через середину основания проведена прямая, параллельная боковой стороне. Найдите периметр отсекаемого при этом четырехугольника.

О т в е т: 28 см.

IV. Домашнее задание

Решить задачи № 51, 56.

Указания к задачам

51. Стороны полученного треугольника — это средние линии треугольника, они в 2 раза меньше сторон данного треугольника, тогда их сумма в 2 раза меньше периметра данного треугольника

О т в е т: 6 см.

56. Можно использовать результат задачи 57 или выполнить аналогичные рассуждения.

Р е ш е н и е.

EF — средняя линия в ΔABC (рис. 6.114), GH — средняя линия в ΔACD, EH — средняя линия в ΔABD, FG — средняя линия в ΔBCD, отсюда $EF = GH = \frac{1}{2} AC = 5$ м, $EH = FG = \frac{1}{2} BD = 6$ м.

О т в е т: 5 м, 6 м.

Дополнительные задачи

1. Докажите, что средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB, отсекает на любом отрезке CD (D — точка на стороне AB) равные отрезки.

2. Докажите, что высота BD треугольника ABC перпендикулярна средней линии, соединяющей середины сторон AB и BC.

3. DE — средняя линия треугольника ABC, $D \in AB$, $E \in BC$, BM — медиана треугольника. Определите стороны треугольника ABC, если $DE = 3$ см, $EM = 4$ см, $DM = 6$ см.

4. DE — средняя линия треугольника ABC, причем D и E — точки на сторонах BC и AC. Определите длину стороны AB, если она на 4 см больше, чем DE.

5. Докажите, что середины сторон квадрата являются вершинами квадрата.

Урок 14

ТЕМА: Трапеция

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение трапеции, определение и свойства средней линии трапеции;

уметь применять определение трапеции для ее распознавания и использования свойств углов при параллельных прямых и секущей, воспроизводить доказательство теоремы о средней линии трапеции, применять определение и свойства средней линии трапеции в решении несложных вычислительных задач.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 15 мин	Определение трапеции, определение и свойства средней линии трапеции
3	Решение задач — 18 мин	Задачи № 65, 68, дидактические задачи на свойства средней линии трапеции

№	Этап урока	Содержание работы
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 17, 19. Задачи № 67, 69

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить решение задач № 51 устно, № 56 с выполнением рисунка на доске.

II. Изучение нового материала

1. Перед введением *определения трапеции* полезно вспомнить с учащимися определение параллелограмма. У параллелограмма по определению обе пары противолежащих сторон параллельны (рис. 6.100, *а*). Теперь будет рассмотрен такой вид четырехугольника, у которого две противолежащие стороны параллельны, а две другие не параллельны (рис. 6.100, *б*).

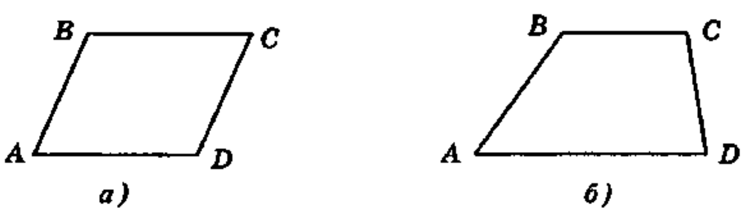


Рис. 6.100

Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны.

Параллельные стороны трапеции называются основаниями, две другие стороны называются боковыми сторонами.

На *закрепление понятия трапеции* можно предложить учащимся следующие задания:

Задание 1. *Какие четырехугольники на рис. 6.101 а–в являются трапециями? Назовите их основания и боковые стороны.*

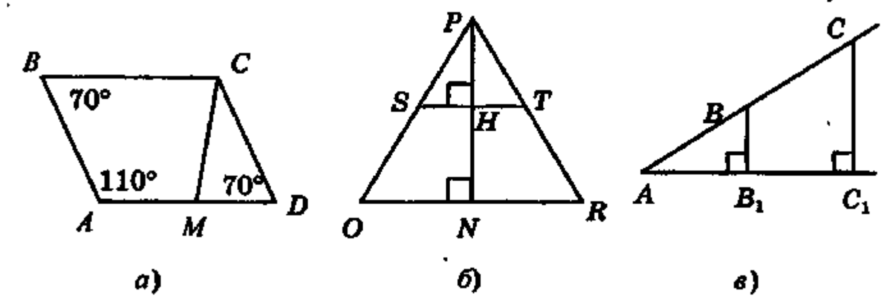


Рис. 6.101

О т в е т: *ABCM*, *OSTR*, *OSHN*, *NHTR*, B_1BCC_1 — трапеции (*ABCD* — не трапеция, а параллелограмм, так как $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$).

Задание 2. ***В равностороннем треугольнике ABC со стороной 8 см проведена средняя линия DE (рис. 6.102). Определите вид четырехугольника ADEC. Чему равны стороны этого четырехугольника?***

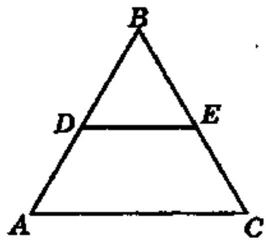


Рис. 6.102

О т в е т: Трапеция; 8 см, 4 см, 4 см, 4 см.

2. При введении определения и свойств средней линии трапеции используется аналогия с определением средней линии треугольника.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется средней линией трапеции.

Вспомнив с учащимися свойства средней линии треугольника, формулируем свойства средней линии трапеции.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

По ходу *доказательства теоремы* на доске и в тетрадях фиксируются его шаги:

1) Дополнительное построение: прямая *BP* пересекает прямую *AD* в точке *E* (рис. 6.103).

2) $\Delta PBC = \Delta PED$ ($CP = DP$, $\angle CPB = \angle DPE$ — вертикальные, $\angle PCB = \angle PDE$ — внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей *CD*).

3) Тогда $PB = PE$, $BC = ED$, значит, PQ — средняя линия ΔABE. Отсюда $PQ \parallel AE$, $PQ = \frac{1}{2}AE$.

4) Вывод: $PQ \parallel AD \parallel BC$, $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

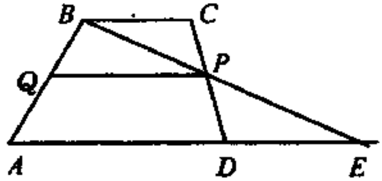


Рис. 6.103

Для того чтобы учащимся было легче запомнить идею доказательства и дополнительное построение, можно еще раз напомнить им, что проводится такое построение, чтобы среднюю линию трапеции — отрезок PQ — можно было рассматривать как среднюю линию треугольника ABE.

3. В качестве упражнений на *закрепление теоремы о средней линии трапеции* можно использовать устные упражнения:

Задание 3. *Основания трапеции равны 7 см и 9 см. Чему равна средняя линия трапеции?*

Ответ: 8 см.

Задание 4. *MN — средняя линия трапеции $ABCD$. Через точку N проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая сторону AD в точке P (рис. 6.104). Докажите, что $AMNP$ — параллелограмм.*

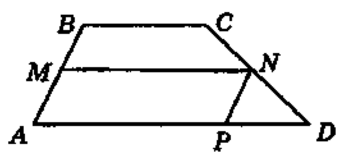


Рис. 6.104

Ответ: $AMNP$ — параллелограмм, так как $AM \parallel NP$ по условию, а $MN \parallel AP$ по свойству средней линии трапеции.

Задание 5. *В трапеции $ABCD$ (рис. 6.105) известны основания $AD = 10$ см, $BC = 6$ см и боковые стороны $AB = 4$ см, $CD = 5$ см. Чему равны стороны четырехугольника $AEFD$, если EF — средняя линия трапеции $ABCD$?*

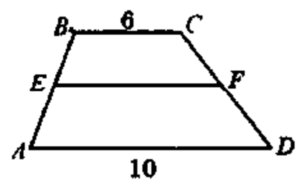


Рис. 6.105

Ответ: 2 см, 8 см, 2,5 см, 10 см.

III. Решение задач

Решить задачу № 65

Прежде чем приступить к решению задачи, нужно вспомнить с учащимися, что такое расстояние от точки A до прямой a (длина отрезка AM, где $AM \perp a$). После этого выполняются рисунок (рис. 6.106) и краткая запись условия.

Дано: $AO = OB$, $AM \perp a$, $BK \perp a$, $OH \perp a$; $AM = 10$ м, $BK = 20$ м.

Найти: OH.

Решение.

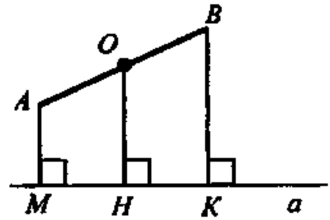


Рис. 6.106

1) $AM \parallel BK$ (т.к. $AM \perp a$, $BK \perp a$), но $AM \neq BK$, значит, $ABKM$ — не параллелограмм, а трапеция.

2) Т.к. $AM \parallel OH \parallel BK$ и $AO = OB$, то по теореме Фалеса $MH = HK$.

3) OH — средняя линия трапеции, тогда $OH = \dfrac{10+20}{2} = 15$ (м).

Ответ: 15 м.

Решить задачу № 68

Прежде чем приступить к решению задачи, нужно проанализировать данную в задаче ситуацию, вспомнить с учащимися, что касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. После этого выполняются рисунок (рис. 6.107) и краткая запись условия.

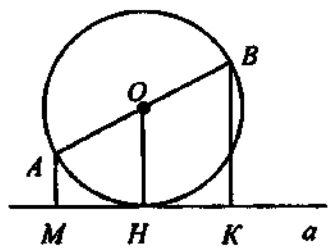


Рис. 6.107

Дано: O — центр окружности, AB — диаметр, a — касательная, H — точка касания, $AM \perp a$, $BK \perp a$, $AM = 0{,}6$ м, $BK = 1{,}6$ м.

Найти: диаметр окружности.

Решение.

1) $AM \parallel BK$ (т.к. $AM \perp a$, $BK \perp a$), но $AM \neq BK$, значит, $ABKM$ — не параллелограмм, а трапеция.

2) Т.к. OH — радиус, проведенный в точку касания, то $OH \perp a$, значит, $AM \parallel OH \parallel BK$ и $AO = OB$, тогда по теореме Фалеса $MH = HK$.

3) OH — средняя линия трапеции, тогда $OH = \frac{0,6+1,6}{2} = 1,1$ м. Тогда $2R = 2,2$ м.

Ответ: 2,2 м.

Решить задачу

PM — средняя линия трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$. Она пересекает диагональ AC в точке K. Чему равны отрезки PK и KM?

Решение.

1) Т.к. PM — средняя линия, то $PM \parallel AD$, $AP = BP$ (рис. 6.108).

2) По теореме Фалеса $AK = KC$, значит, PK — средняя линия ΔABC, MK — средняя линия ΔACD.

3) По свойству средней линии треугольника $PK = \frac{b}{2}$, $MK = \frac{a}{2}$.

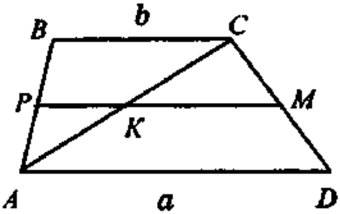


Рис. 6.108

Решить задачу

Средняя линия трапеции равна 8 см, а одно из оснований равно 6 см. Чему равно другое основание?

Решение.

Пусть второе основание трапеции равно a. По свойству средней линии трапеции имеем $8 = \frac{6+a}{2}$, тогда $a + 6 = 16$, $a = 10$ см.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 17, 19. Решить задачи № 67, 69.

Указания к задачам

67. Пусть одно основание равно $2x$, а второе основание равно $3x$. По свойству средней линии трапеции $5 = \frac{2x+3x}{2}$, тогда $5x = 10$, $x = 2$, основания равны 4 м и 6 м.

69. Пусть одно основание равно x, а второе основание равно $x + 4$ (см). По свойству средней линии трапеции $7=\frac{x+x+4}{2}$, тогда $2x + 4 = 14$, $x = 5$, основания равны 5 см и 9 см.

Дополнительные задачи

1. В трапеции $MHPK$ проведен отрезок PE, параллельный боковой стороне MH. Определите вид четырехугольника $MHPE$.

Ответ: параллелограмм.

2. Каждая из боковых сторон трапеции $ABCD$ разделена на четыре равные части (рис. 6.109). Чему равны отрезки M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3, если $AD = 11$, $BC = 3$?

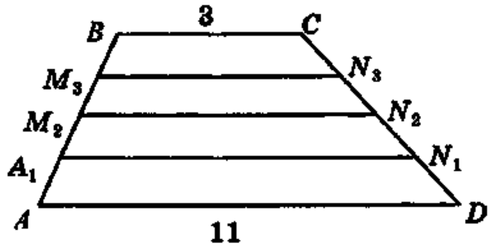


Рис. 6.109

Ответ: 9, 7, 5.

Урок 15

ТЕМА: Равнобокая трапеция

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение равнобокой трапеции;

уметь применять свойства равнобокой трапеции в решении задач.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 10 мин	
2	Изучение нового материала — 15 мин	Определение и свойства равнобокой трапеции. Задача № 60
3	Решение задач — 13 мин	Задача № 62, дидактические задачи на свойства равнобокой трапеции
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольный вопрос 18. Задачи № 61, 63

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 17, 19, решение задач № 67, 69. При проверке решения задач следует обратить внимание на то, что используется составление уравнения на основе свойства средней линии трапеции. Уравнения полезно записать на доске, остальные рассуждения можно провести устно.

II. Изучение нового материала

При введении определения равнобокой трапеции полезно провести аналогию с определением равнобедренного треугольника.

Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется равнобокой.

Рассмотрение свойств равнобокой трапеции лучше всего начать с решения задачи № 60.

Докажите, что у равнобокой трапеции углы при основании равны.

Решение этой задачи приведено в тексте учебника, однако лучше решить ее другим способом, который позволяет сформулировать ряд геометрических фактов, имеющих широкое применение в решении задач.

Дано: трапеция $ABCD$, $AB = CD$ (рис. 6.110, *а*).
Доказать: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$.
Доказательство.
1) Проведем $BH \perp AD$ и $CK \perp AD$ (рис. 6.110, *б*).

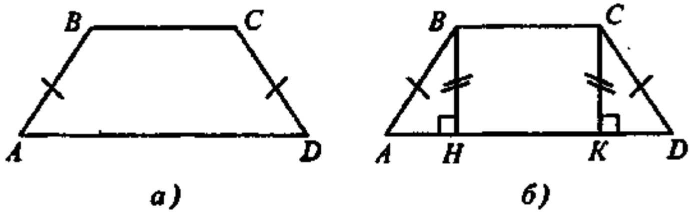


Рис. 6.110

2) $BH = CK$ — расстояние между параллельными прямыми.
3) $\Delta ABH = \Delta DCK$ по гипотенузе и катету, отсюда $\angle A = \angle D$.
4) $\angle ABC = 180° - \angle A$ и $\angle DCB = 180° - \angle D$ (как внутренние односторонние при $BC \parallel AD$). Значит, $\angle ABC = \angle DCB$.

После решения задачи нужно отметить несколько очень важных моментов.

а) Первым шагом решения было дополнительное построение — проведение двух высот. Построение высоты, а часто двух высот — это очень распространенный прием решения задач на трапецию.

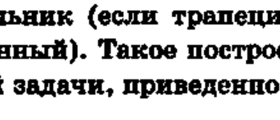


Рис. 6.111

б) Другой вид дополнительного построения, который тоже применяется в решении задач — это проведение прямой, проходящей через вершину одной из боковых сторон и параллельной другой боковой стороне. В этом случае трапеция разбивается на параллелограмм и треугольник (если трапеция равнобокая, то треугольник — равнобедренный). Такое построение (рис. 6.111) выполнено в решении этой задачи, приведенном в тексте учебника.

в) При проведении двух высот (рис. 6.110) трапеция разбивается на прямоугольник и два прямоугольных треугольника. При этом на большем основании высекается отрезок, равный меньшему основанию.

г) В задаче № 60 было доказано, что в случае равнобокой трапеции при проведении двух высот получились равные прямоугольные треугольники. Из равенства треугольников следует, что $AH = KD$.

В ходе решения следующих двух задач полезно рассмотреть еще некоторые свойства равнобокой трапеции. Доказанные в них факты могут использоваться при решении других задач.

Решить задачу

В равнобокой трапеции ABCD к большему основанию AD проведена высота BH. Докажите, что точка H разбивает основание AD на отрезки, один из которых равен полусумме оснований (то есть средней линии трапеции), а другой — полуразности оснований трапеции.

Решение.

1) Проведем вторую высоту CK (рис. 6. 112). Обозначим $AD = a$, $BC = b$.

2) Т.к. $BHKC$ — прямоугольник, то $HK = BC = b$, тогда

$$AH = KD = \frac{AD - HK}{2} = \frac{a-b}{2},$$

$$HD = HK + KD = b + \frac{a-b}{2} = \frac{2b+a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

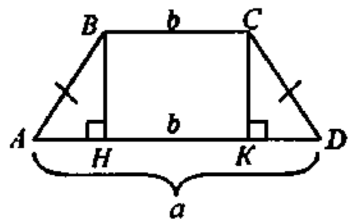


Рис. 6.112

Решить задачу

Докажите, что диагонали равнобокой трапеции равны.

Решение.

1) Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ (рис. 6. 113):

$AB = CD$ по условию, AD — общая сторона, $\angle BAD = \angle ADC$ – как углы при основании равнобокой трапеции. Тогда $\triangle ABD = \triangle DCA$ по двум сторонам и углу между ними.

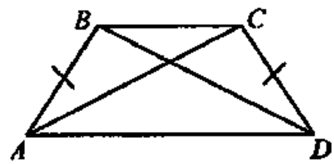


Рис. 6.113

2) Из равенства треугольников следует, что $AC = BD$.

После решения этих трех задач можно подвести итог — сформулировать доказанные в этих задачах свойства равнобедренной трапеции

В равнобедренной трапеции:

1) углы при каждом основании равны;

2) диагонали равны;

3) высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки, один из которых равен средней линии, т.е. полусумме оснований, а другой — равен полуразности оснований (рис. 6. 114).

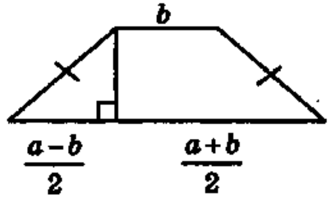


Рис. 6.114

IV. Решение задач

Решить задачу № 62

Решение.

1) Проведем $CM \parallel AB$ (рис. 6.115), тогда $ABCM$ — параллелограмм, в нем $CM = AB$, $BC = AM$.

2) $\triangle DCM$ — равнобедренный и $\angle D = 60°$, тогда все его углы равны 60°, а значит, $CM = CD = MD = 1$ м.

3) $BC = AM = AD - DM = 2{,}7 - 1 = 1{,}7$ (м).

Ответ: 1,7 м.

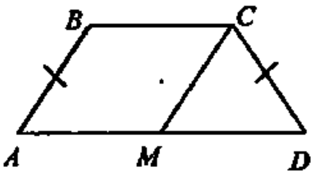


Рис. 6.115

Решить задачу

Решение.

1) Пусть K, M, N, O — середины сторон равнобокой трапеции (рис. 6.116). Тогда $KMNO$ — параллелограмм, у которого стороны попарно параллельны диагоналям трапеции и равны их половинам.

2) Т.к. $AC = BD$, то все стороны параллелограмма $KMNO$ равны, т.е. он является ромбом.

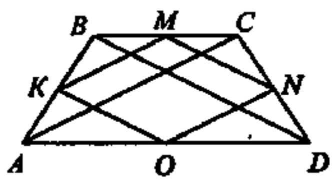


Рис. 6.116

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольный вопрос 18. Решить задачи № 61, 63.

Указания к задачам

61. Пусть один угол равен α, а другой — $\alpha + 40°$. В равнобокой трапеции углы, прилежащие к основанию равны, значит, к каждой боковой стороне прилежат углы, равные α и $\alpha + 40°$. В сумме они составляют 180° (как внутренние односторонние при параллельных прямых и секущей). Тогда $2\alpha + 40° = 180°$, $\alpha = 70°$.

Ответ: 70°, 70°, 110°, 110°.

63. Пусть в трапеции $ABCD$ $AH = 6$ см, $HD = 30$ см (см. рис. 6.130, *б*). Тогда $AD = AH + DH = 6 + 30 = 36$ (см); $BC = HK = DH - DK = 30 - 6 = 24$ (см).

Дополнительные задачи

1. В трапеции $ABCD$ с углом A, равным 45°, проведены две высоты BM и CK, причем $AM = MK = KD$. Докажите, что $ABCD$ — равнобокая трапеция, а $BCKM$ — квадрат.

2. $ABCD$ — трапеция, у которой боковая сторона AB перпендикулярна основанию, а боковая сторона CD равна диагонали AC. Определите среднюю линию трапеции, если $BC = 1$ м.

Ответ: 1,5 м.

Урок 16

ТЕМА: Теорема о пропорциональных отрезках. Построение четвертого пропорционального отрезка

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Теорема о пропорциональных отрезках используется в дальнейшем при доказательстве теоремы о косинусе острого угла прямоугольного треугольника. Она играет вспомогательную роль, поэтому усвоения ее доказательства и детальной отработки ее применения не требуется. Достаточно будет ознакомить учеников со смыслом утверждения этой теоремы и с примерами ее применения.

По-видимому, доказательство, приведенное в учебном пособии, является наиболее простым из известных *полных* обоснований рассматриваемого факта. Тем не менее и оно является в силу объективных причин достаточно трудным. Поэтому в зависимости от подготовленности класса можно выбирать, проводить ли полное доказательство этой теоремы или ограничиться «облегченным» вариантом доказательства. Ниже приводятся рекомендации по работе с этой теоремой, где доказательство общего случая, приведенное в учебнике (не для запоминания), на уроке рассматривать не предполагается. Его можно оставить для самостоятельного рассмотрения учащимся, интересующимся математикой (по их желанию). При любом варианте работы с теоремой можно не требовать от учащихся воспроизведения ее доказательства.

В отдельный пункт в учебнике вынесена задача на построение четвертого пропорционального отрезка. Она не является одной из основных задач на построение, и обязательного усвоения алгоритма построения не требуется.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

уметь выполнять деление отрезка в заданном рациональном отношении.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 15 мин	Теорема о пропорциональных отрезках, задача на построение четвертого пропорционального отрезка, деление отрезка в заданном отношении
3	Решение задач — 18 мин	Задача № 6.1, дидактические задачи на теорему о пропорциональных отрезках

№	Этап урока	Содержание работы
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольный вопрос 20 (без доказательства общего случая). Задача № 73

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопрос 18. Решить задачи № 61, 63 с выполнением рисунка на доске. При проверке задачи 63 полезно предложить учащимся проверить, выполняется ли для данной трапеции (с вычисленными основаниями) тот факт, что основание высоты делит большее основание на отрезки, один из которых равен средней линии трапеции, а другой равен полуразности оснований.

II. Изучение нового материала

1. Перед рассмотрением теоремы о пропорциональных отрезках целесообразно предложить учащимся вводное задание, направленное на более осознанное восприятие ее смысла.:

На рис. 6.117 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots$; $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \dots$.

Докажите, что $\dfrac{OA_1}{OB_1} = \dfrac{OA_2}{OB_2} = \dfrac{OA_3}{OB_3} = \dots$.

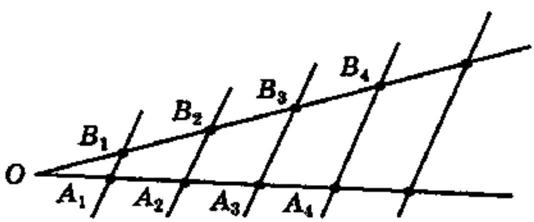


Рис. 6.117

Решение.

1) Пусть $OA_1 = a$, тогда $OA_2 = 2a$, $OA_3 = 3a$, $OA_4 = 4a$, ...

2) По теореме Фалеса $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots$. Пусть $OB_1 = b$, тогда $OB_2 = 2b$, $OB_3 = 3b$, $OB_4 = 4b$, ...

3) $\frac{OA_1}{OB_1}=\frac{a}{b}$, $\frac{OA_2}{OB_2}=\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b}$, $\frac{OA_3}{OB_3}=\frac{3a}{3b}=\frac{a}{b}$, ...

4) Значит, $\frac{OA_1}{OB_1}=\frac{OA_2}{OB_2}=\frac{OA_3}{OB_3}=\dots$, что и требовалось доказать.

2. Таким образом, для данной задачи мы получили, что отрезки, отсекаемые на сторонах угла параллельными прямыми, пропорциональны. В общем случае этот факт формулируется как теорема о пропорциональных отрезках.

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

Дано: $\angle BAC$, $B_1C_1 \parallel BC$ (рис. 6.118).

Доказать: $\frac{AC_1}{AC}=\frac{AB_1}{AB}$.

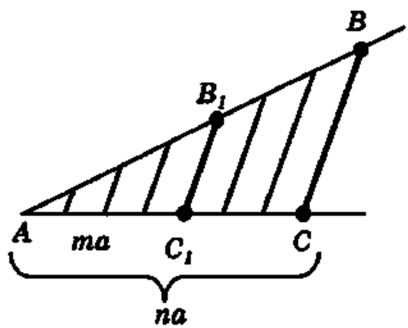


Рис. 6.118

Доказательство.

1) Пусть существует отрезок длины a такой, что $AC = na$, $AC_1 = ma$. То есть отрезок AC можно зазбить на n отрезков, а AC_1 — на m отрезков длины a.

Проведем через точки деления прямые, параллельные BC и B_1C_1.

2) По теореме Фалеса отрезок AB при этом будет разбит на равные отрезки длины b, причем $AB = nb$, $AB_1 = mb$.

3) $\frac{AC_1}{AC}=\frac{ma}{na}=\frac{m}{n}$, $\frac{AB_1}{AB}=\frac{mb}{nb}=\frac{m}{n}$, значит, $\frac{AC_1}{AC}=\frac{AB_1}{AB}$.

После рассмотрения этого доказательства (случай соизмеримых отрезков) учащимся следует сообщить, что в учебнике приведено доказательство и для общего случая.

Замечание. Возможны и другие варианты изучения этой теоремы. Например, можно по рис. 6.140 предложить учащимся задачу: «Параллельные прямые B_1C_1 и BC пересекают стороны угла A. При этом $AB_1 : AB = 4 : 7$». Докажите, что отношение отрезков $AC_1 : AC$ тоже равно 4 : 7. Затем следует пояснить, что аналогично можно доказать рассматриваемую теорему в общем виде, при этом случай несоизмеримых отрезков можно предложить разобрать наиболее сильным ученикам самостоятельно.

3. После доказательства теоремы можно по аналогии с теоремой Фалеса сделать замечание о том, что данная теорема справедлива и в случае, когда речь идет не о сторонах угла, а о любых двух прямых.

4. Для *закрепления смысла теоремы* можно использовать упражнение:

На рис. 6.119 $BC \parallel DE$. Найдите длину отрезка CE, если $AB = 4$, $AD = 10$, $AC = 6$.

Решение.

По теореме о пропорциональных отрезках: $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$,

$\frac{6}{AE} = \frac{4}{10}$; $AE = \frac{6 \cdot 10}{4} = 15$,

$CE = AE - AC = 15 - 6 = 9$.

Ответ: 9.

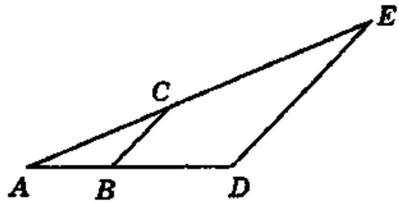


Рис. 6.119

III. Решение задач

Решить задачу 1

На рис. 6.120 $MK \parallel AC$, $BK = 16$ см, отрезок BM в 2 раза больше отрезка AM. Определите сторону BC.

Решение. Пусть $AM = x$, тогда $BM = 2x$, $AB = 3x$. По теореме о пропорциональных отрезках: $\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BK}$, $\frac{3x}{2x} = \frac{BC}{16}$,

$BC = \frac{16 \cdot 3}{2} = 24$ (см).

Ответ: 24 см.

Решить задачу 2

На рис. 6.120 $MK \parallel AC$. Докажите, что $\frac{BM}{MA} = \frac{BK}{KC}$.

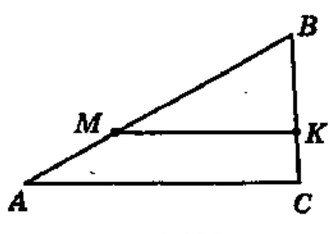


Рис. 6.120

Решение.

1) По теореме о пропорциональных отрезках: $\dfrac{AB}{MB}=\dfrac{BC}{BK}$, пусть эти отношения равны числу x, т.е. $\dfrac{AB}{MB}=x$ и $\dfrac{BC}{BK}=x$.

Тогда $AB = MB \cdot x$ и $BC = BK \cdot x$.

2) $\dfrac{BM}{MA}=\dfrac{BM}{AB-BM}=\dfrac{BM}{BM\cdot x-BM}=\dfrac{1}{x-1}$,

$\dfrac{BK}{KC}=\dfrac{BK}{BC-BK}=\dfrac{BK}{BK\cdot x-BK}=\dfrac{1}{x-1}$, т.е. $\dfrac{BM}{MA}=\dfrac{BK}{KC}$.

Таким образом, доказано, что пропорциональны не только отрезки, исходящие из вершины угла, но и последовательные отрезки, отсекаемые на сторонах угла параллельными прямыми.

Решить задачу 3

На рис. 6.121 $BC \parallel DE$. Найдите длину отрезка BD, если $AB = 8$, $AC = 12$, $AE = 27$.

Решение.

Способ 1

1) По теореме о пропорциональных отрезках: $\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AB}{AD}$, $\dfrac{12}{27}=\dfrac{8}{AD}$, отсюда $AD = \dfrac{27\cdot 8}{12} = 18$, $BD = AD - AB = 18 - 8 = 10$.

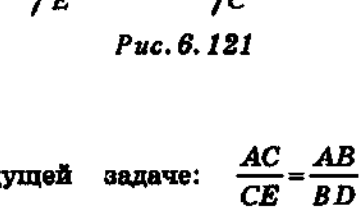


Рис. 6.121

Способ 2

1) По доказанному в предыдущей задаче: $\dfrac{AC}{CE}=\dfrac{AB}{BD}$,

$\dfrac{12}{27-12}=\dfrac{8}{BD}$, отсюда $BD=\dfrac{15\cdot 8}{12}=10$.

Ответ: 10.

Решить задачу 4

Разделите данный отрезок AB точкой C так, чтобы $AC : CB = 3 : 5$.

Решение.

1) Проведем луч AH, отложим на нем восемь равных отрезков длины a. Обозначим конец третьего отрезка буквой K, конец восьмого — буквой M (рис. 6.122).

2) Проведем прямую BM, а затем прямую $KD \parallel BM$. Обозначим точку пересечения прямых KD и AB буквой C.

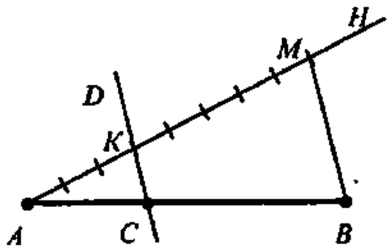


Рис. 6.122

3) По следствию из теоремы о пропорциональных отрезках $\frac{AC}{CB}=\frac{3a}{5a}=\frac{3}{5}$.

Решить задачу № 6.1 (в тексте п.61)

Дано: отрезки a, b, c (рис. 6.123, a)

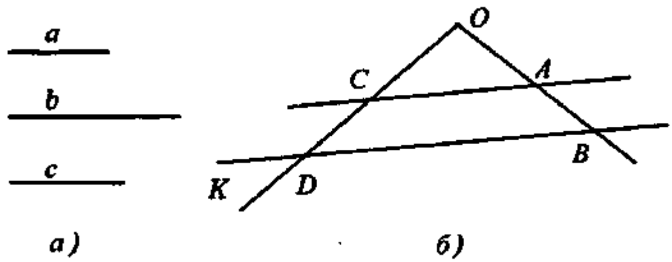


Рис. 6.123

Построить: отрезок $x = \frac{bc}{a}$.

Построение.

1) Строим $\angle O$.

2) На одной стороне угла откладываем $OA = a$ и $OB = b$, а на другой стороне $OC = c$.

3) Проводим прямую AC, а затем $BK \parallel AC$. Обозначим точку пересечения прямых BK и OC буквой D (рис. 6.123, $б$).

4) По теореме о пропорциональных отрезках: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$, откуда $OD=\frac{OB\cdot OC}{OA}=\frac{b\cdot c}{a}$, т.е. $OD = x$.

Поскольку отрезок x является четвертым членом пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, то построенный отрезок x называется ***четвертым пропорциональным.***

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольный вопрос 20 (без доказательства общего случая). Решить задачу № 73. К задаче 73 необходимо дать более подробное указание, чем приведено в учебнике.

Даны отрезки a, b, c, d, e. Постройте отрезок $x=\frac{abc}{de}$.

Указание. Нужно представить отрезок x в виде $x=\frac{ab}{d}\cdot\frac{c}{e}$ и сначала построить отрезок $f=\frac{ab}{d}$, а затем $x=\frac{fc}{e}$.

Указания к задачам

73. Нужно два раза построить четвертый пропорциональный отрезок (см. указание выше).

Дополнительные задачи

1. Отрезок MK параллелен стороне AC треугольника ABC ($M\in AB$, $K\in BC$). Найдите длину отрезка CK, если $AM = 6$, а отрезок BM в 1,5 раза больше отрезка BK.

Ответ: 4.

2. Точка A делит боковую сторону трапеции на отрезки, один из которых в 3 раза больше другого. Через точку A проходит прямая, параллельная основаниям трапеции. Она пересекает вторую боковую сторону, равную 20 см, в точке B. Найдите длины отрезков, на которые точка B делит боковую сторону.

Ответ: 5 см и 15 см.

Урок 17

ТЕМА: Решение задач

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Урок посвящен повторению материала, выносимого на проверку в контрольной работе № 2. Повторение проводится в ходе решения задач. При этом главный акцент делается не столько на получение ответа, сколько на обоснование решения и повторение приемов решения задач данной тематики.

На уроке рассматривается задача 74, с помощью которой вводится важный геометрический факт (свойство точки пересечения медиан треугольника), который широко применяется в решении задач. Условие задачи разбито на три части, что фактически диктует план рассуждений. Так как полученное в результате решения этой задачи свойство точки пересечения медиан треугольника дает инструмент решения ряда задач, то полезно, чтобы учащиеся запомнили формулировку этого свойства.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 4 мин	
2	Изучение нового материала — 12 мин	Свойство точки пересечения медиан треугольника (задача № 74)
3	Решение задач — 14 мин	Задача № 66, дидактические задачи на повторение свойств трапеции, средней линии трапеции и треугольника
4	Самостоятельная работа — 8 мин	
5	Домашнее задание — 2 мин	Формулировка свойства точки пересечения медиан треугольника. Задачи № 58, 59

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопрос 20. Решить задачу № 73 с выполнением рисунка на доске.

II. Изучение нового материала

Свойство точки пересечения медиан треугольника вводится в ходе решения задачи № 74.

1) В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке M (рис. 6.124, а). В треугольнике AMB проведена средняя линия PQ. Докажите, что четырехугольник A_1B_1PQ — параллелограмм (рис. 6.124, б).

2) Докажите, что любые две медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины.

3) Докажите, что все три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

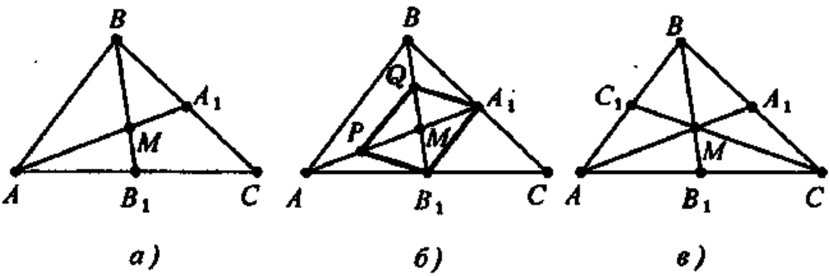


Рис. 6.124

Р е ш е н и е.

1) ΔABM: т.к. PQ — средняя линия, то $PQ \parallel AB$, $PQ = \dfrac{1}{2}AB$.

ΔABC: т.к. A_1B_1 — средняя линия, то $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1B_1 = \dfrac{1}{2}AB$, отсюда $PQ \parallel A_1B_1$, $PQ = A_1B_1$, т.е. A_1B_1PQ — параллелограмм.

2) $AP = PM$, т.к. PQ — средняя линия ΔABM, $PM = MA_1$ по свойству диагоналей параллелограмма. Тогда $AP = PM = MA_1$, $AM : MA_1 = 2 : 1$. Аналогично, $BQ = QM = MB$, $BM : MB_1 = 2 : 1$.

3) Медиана CC_1 пересекается с медианой AA_1 в точке, которая делит AA_1 в отношении 2 : 1 (по доказанному), т.е. в точке M. Значит, все три медианы пересекаются в одной точке (рис. 6.124, *в*).

Замечание. Решение задачи можно провести устно с выполнением на доске рисунка и кратких записей:

1) $PQ \parallel AB$, $PQ = \dfrac{1}{2}AB$, $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1B_1 = \dfrac{1}{2}AB$. Тогда $PQ \parallel A_1B_1$, $PQ = A_1B_1$, т.е. A_1B_1PQ — параллелограмм.

2) $AP = PM$, $PM = MA_1$ тогда $AM : MA_1 = 2 : 1$. Аналогично, $BM : MB_1 = 2 : 1$.

3) Медианы CC_1 и AA_1 пересекаются в точке M. Значит, AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M.

После решения задачи необходимо сформулировать в общем виде доказанные утверждения:

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

Эти утверждения учащиеся должны записать в тетрадях и запомнить. В дальнейшем их можно применять при решении задач как доказанные теоремы.

Для закрепления свойства точки пересечения медиан треугольника можно предложить учащимся задачу:

Медиана AD треугольника равна 6 см. Найдите длины отрезков AO и OD, если A — вершина треугольника, O — точка пересечения медиан.

Р е ш е н и е. $AO = \dfrac{2}{3}AD = 4$ см, $OD = \dfrac{1}{3}AD = 2$ см.

III. Решение задач

Решить задачу 1

Средняя линия трапеции точкой пересечения с диагональю делится на отрезки 7 см и 13 см. Найдите основания трапеции.

Дано: $ABCD$ — трапеция, KM — средняя линия, $KO = 7$ см, $OM = 13$ см (рис. 6.125).

Найти: AD и BC.

Решение.

1) Т.к. KM — средняя линия трапеции, то $AK = KB$, $CM = MD$ и $KM \parallel BC \parallel AD$, тогда по теореме Фалеса $AO = OC$.

2) KO — средняя линия треугольника ABC, значит, $BC = 2KO = 14$ см.

3) OM — средняя линия треугольника ACD, значит, $AD = 2OM = 26$ см.

Ответ: 14 см и 26 см.

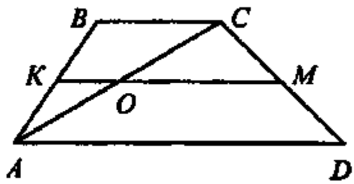


Рис. 6.125

Решить задачу 2

Найдите отрезки, на которые средняя линия трапеции делится точками пересечения с диагоналями, если основания трапеции равны 20 см и 14 см.

Решение.

По доказанному в предыдущей задаче:

$OK = \dfrac{BC}{2} = 7$ см и $PM = \dfrac{BC}{2} = 7$ см, $OM = \dfrac{AD}{2} = 10$ см (рис. 6.126).

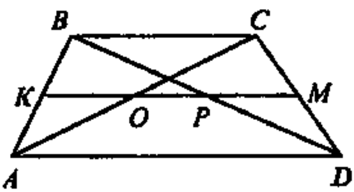


Рис. 6.126

Тогда $OP = \dfrac{AD}{2} - \dfrac{BC}{2} = 10$ см $- 7$ см $= 3$ см.

Ответ: 7 см, 3 см, 7 см.

Решить задачу № 66

Задача повышенной трудности. Поэтому надо помочь учащимся увидеть на рисунке трапецию, ее основания, диагонали и среднюю линию. При выполнении рисунка (рис. 6.127, *а*) необходимо вспомнить, что расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Дано: $AM \perp a$, $BK \perp a$, $CH \perp a$, $AC = CB$, $AM = 10$ см, $BK = 4$ см.

Найти: CH.

Решение.

1) Т.к. $AM \perp a$, $BK \perp a$, $CH \perp a$, то $AM \parallel BK \parallel CH$. Т.к. $AC = BC$, то по теореме Фалеса $MD = DB$.

2) CD — средняя линия треугольника ABM, значит, $CD = 0,5AM = 5$ см.

3) DH — средняя линия треугольника BMK, значит, $DH = 0{,}5BK = 2$ см, тогда $CH = 5$ см $- 2$ см $= 3$ см.

О т в е т: 3 см.

Замечание. После решения задачи можно подчеркнуть интересный факт: найденное расстояние (CH) не зависит от расстояния между точками A и B (см. рис. 6.127, *б*).

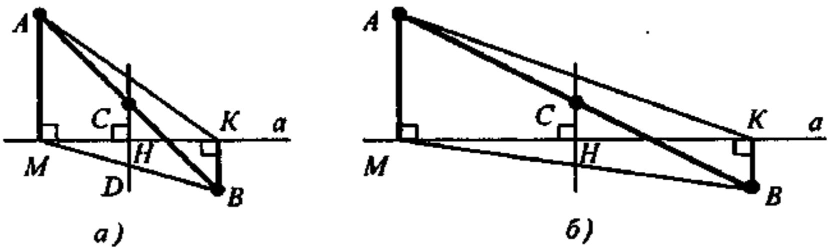


Рис. 6.127

IV. Самостоятельная работа

1-й вариант

Прямая CM, параллельная боковой стороне AB трапеции $ABCD$, делит основание AD на отрезки $AM = 5$ см и $MD = 4$ см. Определите среднюю линию трапеции.

О т в е т: 7 см.

2-й вариант

Параллельно боковой стороне CD трапеции $ABCD$ проведена прямая BK, отсекающая на основании AD отрезок $AK = 6$ см. Основание $BC = 5$ см. Определите среднюю линию трапеции.

О т в е т: 8 см.

V. Домашнее задание

Выучить формулировку свойства точки пересечения медиан треугольника. Решить задачи № 58, 59.

Указания к задачам

58. Пусть E, F, G, H — середины сторон четырехугольника $ABCD$. Тогда EF, GH, EH и FG — средние линии треугольников ABC, ADC, ABD и BCD. Значит, они равны половинам диагона-

лей AC и BD. В задаче № 55 было доказано, что $EFGH$ — параллелограмм.

Если $ABCD$ — прямоугольник, то его диагонали равны, тогда стороны параллелограмма тоже равны, значит, это ромб (рис. 6.128).

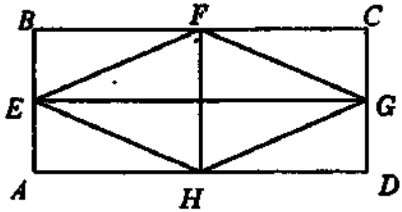


Рис. 6.128

Если $ABCD$ — ромб, то его диагонали перпендикулярны, тогда все углы параллелограмма прямые, значит, это прямоугольник.

59. Обозначим длины искомых отрезков x и y (рис. 6.129). По теореме Фалеса проведенные параллельные прямые отсекают на второй боковой стороне трапеции равные отрезки. Значит, искомые отрезки являются средними линиями двух трапеций, откуда $x=\frac{2+y}{2}$ и $y=\frac{x+5}{2}$.

Тогда $\begin{cases}2x=2+y\\2y=x+5\end{cases}$ $\begin{cases}y=2x-2\\4x-4=x+5\end{cases}$ $3x=9$, $x=3$, $y=4$.

Ответ: 3 м, 4 м.

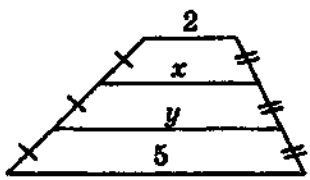


Рис. 6.129

Дополнительные задачи

1. Отрезок MK параллелен стороне AC треугольника ABC ($M \in AB$, $K \in BC$). Найдите длину отрезка CK, если $AM = 6$, $BM = 9$, $BK = 12$.

Ответ: 8.

2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC медианы AP и CK пересекаются в точке M. Докажите, что треугольник AMC равнобедренный, и найдите его боковые стороны, если $AP = 15$ см.

3. В треугольнике MPK медианы MA и PB пересекаются в точке D. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне MK и пересекающая сторону PK в точке T. Найдите длины отрезков PA, AT и TK, если сторона PK равна 12 см.

Ответ: 6 см, 2 см, 4 см.

Урок 18

ТЕМА: Решение задач

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 8 мин	
2	Анализ результатов выполнения самостоятельной работы — 4 мин	
3	Решение задач — 22 мин	Задачи № 71, 72, повторение свойств трапеции, средней линии трапеции и треугольника
4	Домашнее задание — 6 мин	Задачи № 64, 70

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить усвоение формулировки свойства точки пересечения медиан. Решить задачи № 58 и 59 с выполнением рисунка и кратких записей на доске.

II. Анализ результатов выполнения самостоятельной работы

Необходимо проанализировать ошибки, которые допускали учащиеся при решении задач самостоятельной работы.

Особое внимание следует обратить на обоснования решения: доказательство того, что при проведении указанного в условии отрезка, параллельного боковой стороне, возникает параллелограмм, а на большем основании отсекается отрезок, равный меньшему основанию (рис. 6. 130).

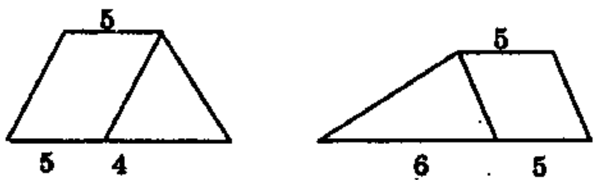


Рис. 6.130

III. Решение задач

Решить задачу 1

Диагональ равнобокой трапеции является биссектрисой угла при большем основании. Известно, что периметр трапеции равен 17 см, а большее основание равно 8 см. Найдите меньшее основание.

Дано: $ABCD$ — трапеция, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 8$ см, $P_{ABCD} = 17$ см (рис. 6. 131).

Найти: BC.

Решение.

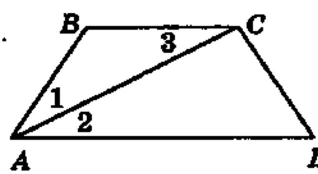


Рис. 6.131

1) $\angle 3 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC.

2) ΔABC: $\angle 1 = \angle 3$ (т.к. $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 2$), значит, $AB = BC$.

3) $AB = BC = CD$, отсюда $BC = (P_{ABCD} - AD) : 3 = 3$ см.

Ответ: 3 см.

Задачи 71 и 72 на построение трапеции относятся к задачам повышенной трудности. Общим приемом решения этих задач является проведение анализа, направленного на поиск треугольника, стороны которого заданы или легко могут быть получены из данных элементов.

Решить задачу № 71

Дано: отрезки a, b ($a < b$), c и d (рис. 6.132).

Построить: трапецию $ABCD$, где $BC = a$ и $AD = b$ — основания, $AB = c$ и $CD = d$.

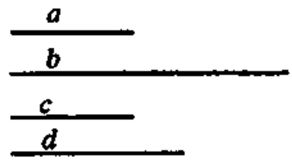


Рис. 6.132

Анализ. Если в трапеции $ABCD$ через точку C провести прямую, параллельную стороне AB, то на основании AD отсекутся отрезки $AK = a$ и $KD = b - a$, причем $CK = c$ (рис. 6.133). Тогда в треугольнике CDK известны три стороны, значит, его можно построить по трем сторонам.

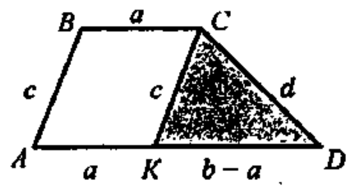


Рис. 6.133

Построение.

1) Строим ΔCDK по трем сторонам: $KD = b - a$, $CK = c$ $CD = d$.

2) На луче DK откладываем $DA = b$.

3) Через точку A проводим прямую, параллельную CK, а через точку C — прямую, параллельную AD, точку пересечения прямых обозначим B.

4) $ABCD$ — трапеция, т.к. $BC \parallel AD$, $BC \neq AD$, $AD = b$, $CD = d$ — по построению; $ABCK$ — параллелограмм, т.к. $AB \parallel CK$, $BC \parallel AK$, значит, $BC = AK = b - (b - a) = a$, $AB = CK = c$. Значит, $ABCD$ — искомая трапеция.

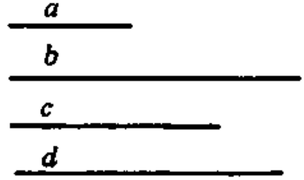


Рис. 6.134

Решить задачу № 72

Дано: отрезки a, b ($a < b$), c и d (рис. 6.134).

Построить: трапецию $ABCD$, где $BC = a$ и $AD = b$ — основания, $AC = c$ и $BD = d$.

Анализ. Если в трапеции $ABCD$ через точку D провести прямую, параллельную диагонали AC, то она пересечет прямую BC в точке K, причем $CK = b$ и $BK = b + a$, причем $DK = c$ (рис. 6.135). Тогда в треугольнике BDK известны три стороны, значит, его можно построить по трем сторонам.

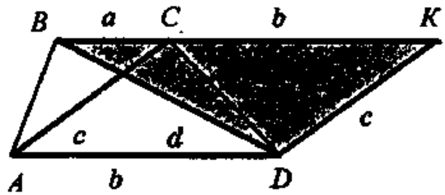


Рис. 6.135

Построение.

1) Строим ΔBDK по трем сторонам: $KD = c$, $BK = b + a$, $BD = d$.

2) На луче BK откладываем $BC = a$.

3) Через точку D проводим прямую, параллельную BK, а через точку C — прямую, параллельную DK, точку пересечения прямых обозначим A.

4) $ACKD$ — параллелограмм, т.к. $AC \parallel DK$, $CK \parallel AD$, значит, $AD = CK = (b + a) - a = b, AC = DK = c;$

$ABCD$ — трапеция, т.к. $BC \parallel AD$, $BC \neq AD$, в ней $BC = a$, $BD = d$ — по построению, $AD = b$, $AC = c$. Значит, $ABCD$ — искомая трапеция.

IV. Домашнее задание

Решить задачи № 64, 70.

В связи с большим числом логических шагов решение задачи № 64 может вызвать затруднения у учащихся, поэтому целесообразно в ходе совместного обсуждения выработать план решения задачи, а полное решение оставить для домашнего задания. В частности, приняв, что $\angle BDC = \alpha$ (рис. 6. 163), и используя свойство углов при основании равнобедренного треугольника, свойство внутренних накрест лежащих углов при параллельных прямых, свойство углов при основании равнобокой трапеции, получаем равенства: $\angle CBD = \angle BDC = \alpha$; $\angle ADB = \angle CBD = \alpha$; $\angle BAD = \angle ADC = 2\alpha$. Затем, используя то, что сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, получаем уравнение $3\alpha = 90°$.

Указания к задачам

64. Решение.

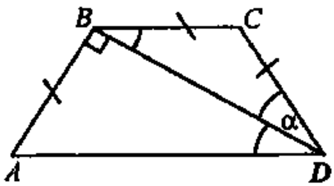


Рис. 6.136

1) Пусть $\angle BDC = \alpha$ (рис. 6. 136).

2) Т.к. ΔBCD — равнобедренный с основанием BD, то $\angle CBD = \angle BDC = \alpha$;

3) $\angle ADB = \angle CBD = \alpha$, как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BD.

4) ΔABD: $\angle B = 90°$, значит, $\angle A + \angle D = 90°$, т.е. $3\alpha = 90°$, откуда $\alpha = 30°$;

5) $\angle A = \angle ADC = 60°$; $\angle ABC = \angle BCD = 120°$.

Ответ: 60°, 60°, 120°, 120°.

70. Ответ: a.

Замечание. При решении этой задачи можно использовать результат, полученный при рассмотрении аналогичной задачи на уроке 15, или аналогичные рассуждения.

Дополнительные задачи

1. Большее основание трапеции равно 8 см, а меньшее на 3 см меньше средней линии. Определите меньшее основание и среднюю линию трапеции.

Ответ: 2 см и 5 см.

2. В треугольнике ABC проведена средняя линия MK ($M \in AB$, $K \in BC$). Определите вид четырехугольника $AMKC$. Чему равен отрезок DE, если D — середина отрезка AM, E — середина отрезка KC и $AC = 8$ см?

Ответ: трапеция, $DE = 6$ (см).

3. Отрезки, на которые диагональ трапеции делит ее среднюю линию, равны 5 см и 9 см. Найдите основания трапеции.

Указание. Используя теорему Фалеса, доказать, что средняя линия трапеции состоит из средних линий двух треугольников.

Ответ: 10 см и 18 см.

Урок 19

ТЕМА: Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Один из углов параллелограмма на 34° больше другого. Чему равны углы параллелограмма?

О т в е т: 73°, 107°, 73°, 107°.

2. K и P — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Докажите, что периметр треугольника APK равен половине периметра треугольника ABC.

О т в е т: $AK = \frac{1}{2}AB$ и $AP = \frac{1}{2}AC$ по условию, $PK = \frac{1}{2}BC$ по свойству средней линии, поэтому $P_{APK} = \frac{1}{2}P_{ABC}$.

3. В прямоугольнике $ABCD$: $AB = 6$ см, $AD = 10$ см, AK — биссектриса угла A ($K \in BC$). Определите среднюю линию трапеции $AKCD$.

О т в е т: Т.к. в ΔABK $\angle A = 45°$, то $BK = AB$, тогда средняя линия трапеции (рис. 6.137) равна $\frac{4+10}{2} = 7$ (см).

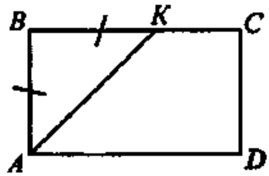


Рис. 6.137

Вариант 2

1. Один из углов параллелограмма в 3 раза меньше другого. Чему равны углы параллелограмма?

О т в е т: 45°, 135°, 45°, 135°.

2. Точки K, M и N — середины сторон AB, BC и AC треугольника ABC. Докажите, что периметр треугольника KMN равен половине периметра треугольника ABC.

О т в е т: по свойству средней линии каждая сторона в ΔKMN равна половине соответствующей стороны ΔABC, поэтому $P_{KMN} = \frac{1}{2}P_{ABC}$.

3. В параллелограмме $ABCD$: $AD = 20$ см, $AB = BD$, BK — высота треугольника ABD. Определите среднюю линию трапеции $KBCD$.

О т в е т: Т.к. $AB = BD$, то в ΔABD BK — высота и медиана, т.е. $KD = 10$ см; тогда средняя линия трапеции (рис. 6. 138) равна $\dfrac{20+10}{2} = 15$ см.

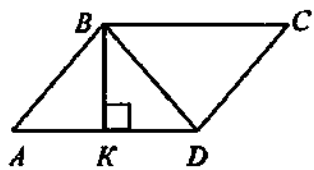


Рис. 6.138

§ 7. Теорема Пифагора

Основная цель изучения темы — сформировать аппарат решения прямоугольных треугольников, необходимый для вычисления элементов геометрических фигур на плоскости и в пространстве. Изучение теоремы Пифагора и тригонометрических функций острого угла позволяет существенно расширить круг геометрических задач, решаемых школьниками, давая им в руки вместе с признаками равенства треугольников достаточно мощный вычислительный аппарат.

Большое внимание уделяется вопросам, связанным с формированием умения решать прямоугольные треугольники: зная две стороны или сторону и острый угол прямоугольного треугольника, находить остальные его элементы. При решении задач учащиеся должны уметь находить значения тригонометрических функций конкретных углов. Как и в любом курсе планиметрии, на основании изучаемых теорем и определений выводятся значения тригонометрических функций углов 30°, 45° и 60° в радикалах. Знание этих величин позволяет существенно упростить вычисления во многих задачах, поэтому целесообразно, чтобы учащиеся их запомнили.

В параграфе рассматриваются три тригонометрических тождества:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \qquad 1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad 1+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

При доказательстве двух последних тождеств используется формула $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (которая была получена при доказательстве теоремы о зависимости синуса и тангенса острого угла только от величины угла — фактически, это тоже одно из основных тригонометрических тождеств).

Заметим, что на данном этапе не ставится целью формирование у учащихся навыков выполнения тождественных преобразований тригонометрических выражений. Следует учесть также, что в курсе алгебры изучается аналогичный тригонометрический материал. В связи с этим можно резко уменьшить количество упражнений на отработку навыков тождественных преобразований тригонометрических выражений (см. задачу 62).

Заметим также, что учащиеся здесь впервые встречаются с термином «тригонометрические» (тождества). Учитель может пояснить, что слово «тригонометрические» греческого происхождения (от слов trigonon — треугольник, metreo — измеряю). Указанные тождества выражают связь между числовыми значениями косинуса, синуса и тангенса острого угла, определяемые как соотношения сторон прямоугольного треугольника.

В параграфе рассматривается важный геометрический материал — неравенство треугольника. Следует заметить, что в рассматриваемой теореме речь идет не только о треугольнике, когда три точки не лежат на одной прямой (то есть являются вершинами треугольника), но и о тех случаях, когда все три точки лежат на одной прямой или какие-либо из точек совпадают. Кроме того, в задаче 41 сформулировано утверждение, обратное «строгой части» теоремы о неравенстве треугольника.

В результате изучения материала параграфа учащиеся должны:

знать формулировку теоремы Пифагора, определения синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника; свойство неравенства треугольника;

уметь вычислять неизвестные стороны и углы прямоугольного треугольника, используя теорему Пифагора, и определения синуса, косинуса и тангенса острого угла.

Урок 21

ТЕМА: Косинус угла

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Теорема о косинусе угла формулирует факт, который необходим для строгого доказательства теоремы Пифагора (причем в доказательстве, данном в учебнике, ссылка на эту теорему не приводится). В решении задач, как правило, теорема о косинусе в явном виде не используется. Кроме того, рассматриваемый в теореме факт является достаточно очевидным для учащихся. В связи с указанными причинами обязательного усвоения формулировки и доказательства теоремы от учащихся можно не требовать.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника;

уметь вычислять косинус угла, строить угол по его косинусу, используя определение.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Анализ выполнения контрольной работы — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 13 мин	Определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника. Теорема о косинусе угла
3	Решение задач — 20 мин	Задачи № 1(2), 1(3), дидактическая задача на закрепление нового материала
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 1, 2 (без доказательства). Задачи № 1 (1 и 4)

ХОД УРОКА

I. Анализ выполнения контрольной работы

Задачи контрольной работы, которые вызвали затруднения у учащихся, необходимо решить, отметив наиболее часто встречавшиеся ошибки в решении.

II. Изучение нового материала

1. Учащимся сообщается *определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника*:

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Необходимо подчеркнуть, что в определении речь идет о катете, прилежащем к углу, косинус которого вычисляется. Так, на рис. 7.1, b — катет, *прилежащий* к углу α, c — гипотенуза, поэтому $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

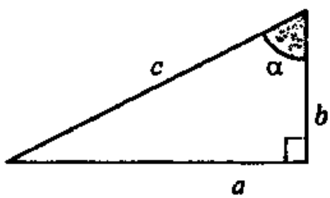


Рис. 7.1

2. Для закрепления введенного определения косинуса учащимся предлагаются простые задания на вычисление по готовым чертежам:

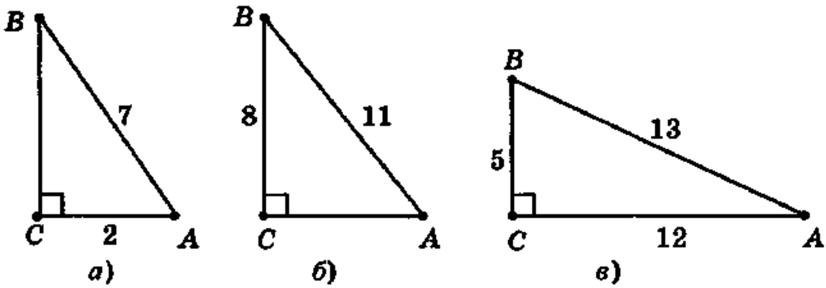


Рис. 7.2

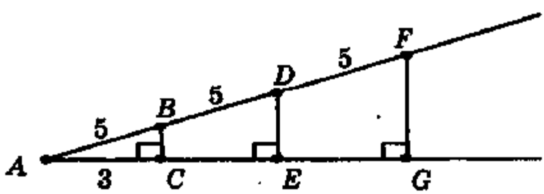


Рис. 7.3

Задание 1. Чему равен $\cos A$ (рис. 7.2, *а*)? О т в е т: $\frac{2}{7}$.

Задание 2. Чему равен $\cos B$ (рис. 7.2, *б*)? О т в е т: $\frac{8}{11}$.

Задание 3. Чему равны $\cos A$ ***и*** $\cos B$ (рис. 7.2, *в*)?

О т в е т: $\cos A = \frac{12}{13}$, $\cos B = \frac{5}{13}$.

Задание 4. На стороне угла А отложены отрезки $AB = BD = DF = 5$ ***см. Из точек*** B, D, F ***опущены перпендикуляры на другую сторону угла*** (рис. 7.3). $AC = 3$ ***см. Вычислите*** $\cos A$: а) ***из*** ΔABC; б) ***из*** ΔADE; в) ***из*** ΔAFG.

О т в е т: По теореме о пропорциональных отрезках $AE = 6$, $AG = 9$. Тогда $\cos A = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15}$.

3. После решения последней задачи учитель может подвести итог: сказать, что при ее решении косинус острого угла A вычисляли с использованием различных треугольников, и во всех случаях результат получился один и тот же, хотя размеры треугольников были различны. Косинус угла не зависит и от расположения треугольников на плоскости, т. е. верно утверждение:

Если в двух прямоугольных треугольниках острые углы равны, то косинусы этих углов равны.

Эта формулировка равноценна приведенной в учебнике:

Косинус угла зависит только от градусной меры угла и не зависит от расположения и размеров треугольника.

Доказательство теоремы проводится с выполнением рисунка на доске (рис. 7.4). Поскольку от учащихся не требуется обязательного усвоения доказательства, оно может быть проведено устно, без записей в тетрадях, а на доске можно выписать только самые необходимые выкладки:

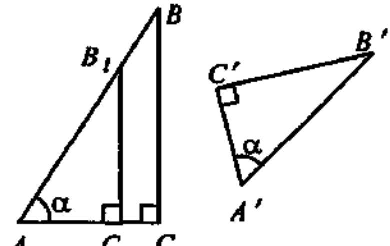


Рис. 7.4

1) $\Delta AB_1C_1 = \Delta A'B'C' \Rightarrow AC_1 = A'C'$, $AB_1 = A'B'$;

2) $\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$.

II. Решение задач

Для закрепления смысла теоремы 7.1 можно предложить две задачи, в которых нужно использовать равенство косинусов углов двух разных прямоугольных треугольников.

Решить задачу 1

В треугольниках ABC и KMO $\angle C = \angle O = 90°$, $\angle A = \angle K$, $AB = 15$ см, $KM = 10$ см, $OK = 8$ см (рис. 7.5). Чему равен катет AC?

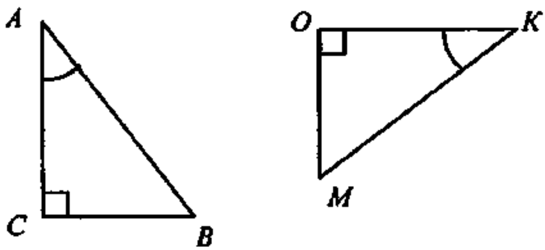


Рис. 7.5

Решение.

1) ΔKMO: $\cos K = \dfrac{OK}{KM}$, ΔABC: $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$;

2) Т.к. $\angle A = \angle K$, то $\cos A = \cos K$, т.е. $\dfrac{AC}{15} = \dfrac{8}{10}$, отсюда $AC = \dfrac{15 \cdot 8}{10} = 12$.

Ответ: 12 см.

Решить задачу 2

В прямоугольном треугольнике ABC катет $BC = 7$ см. Высота CD, опущенная из вершины прямого угла C, отсекает на гипотенузе отрезок $DB = 3$ см (рис. 7.6). Чему равна гипотенуза AB?

Решение.

1) ΔCBD: $\cos B = \dfrac{BD}{CB} = \dfrac{3}{7}$.

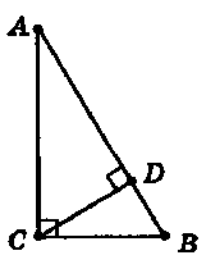


Рис. 7.6

2) ΔABC: $\cos B = \dfrac{BC}{AB}$, тогда $\dfrac{7}{AB} = \dfrac{3}{7}$, $AB = \dfrac{49}{3} = 16\dfrac{1}{3}$ (см).

О т в е т: $16\dfrac{1}{3}$ см.

Решить задачу № 1(2)

Р е ш е н и е.

1) Построим ΔABC, в котором $\angle C = 90°$, $AC = 4$, $AB = 9$ (рис. 7.7). Для этого:

а) на произвольной прямой отложим отрезок $AC = 4$;

б) через точку C проведем прямую, перпендикулярную AC;

в) из точки A как из центра проведем окружность радиуса 9;

г) точку пересечения окружности с проведенной прямой обозначим B.

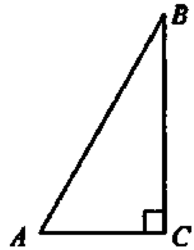


Рис. 7.7

2) $\cos A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{9}$, значит, $\angle A$ — искомый угол.

Замечание. В решении не указаны единицы измерения отрезков. Это могут быть сантиметр или отрезок любой длины, принятый за единицу.

Решить задачу № 1(3)

Решение задачи аналогично решению предыдущей задачи. При этом можно строить прямоугольный треугольник с катетом 0,5 и гипотенузой 1 или с катетом 1 и гипотенузой 2 (а также любой прямоугольный треугольник, в котором катет в 2 раза меньше гипотенузы).

III. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 1, 2 (без доказательства). Решить задачи № 1 (1 и 4).

Указания к задачам

1. Нужно построить прямоугольный треугольник с катетом и гипотенузой, равными: 1) 3 и 5, 4) 4 и 5 (или 0,8 и 1 или 8 и 10 и т.п.). Искомый угол — это острый угол, прилежащий к данному катету.

Дополнительные задачи

1. В прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $\angle A = \angle A_1$;

а) $AC = 5$ см, $AB = 15$ см, $A_1C_1 = 8$ см. Найдите A_1B_1.

б) $A_1C_1 = 4$ см, $A_1B_1 = 7$ см, $AB = 21$ см. Найдите AC.

Ответ: а) 24 см; б) 12 см.

2. В прямоугольном треугольнике катет равен 9 см, а косинус прилежащего угла равен 0,3. Чему равна гипотенуза?

Ответ: 30 см.

3. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 20 см, а косинус одного из острых углов равен 0,7. Чему равен катет, прилежащий к данному острому углу?

Ответ: 14 см.

4. В ΔABC высота CH, опущенная из вершины прямого угла C, делит гипотенузу AB на отрезки $AH = 5$ см, $BH = 4$ см (рис. 7.8). Чему равен катет BC?

Ответ: 6.

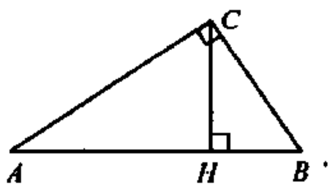


Рис. 7.8

Урок 22

ТЕМА: Теорема Пифагора

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Для решения многих задач на применение теоремы Пифагора необходимо владение понятием корня квадратного. В тех случаях, где по найденному квадрату искомой стороны можно подобрать целое или рациональное значение длины этой стороны, можно обойтись без использования знака корня. Но там, где ответ получается иррациональный, без его использования не обойтись. Поэтому нужно так спланировать изучение курса алгебры, чтобы к моменту изучения теоремы Пифагора понятие квадратного корня было введено.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать формулировки теоремы Пифагора и следствий из нее;

уметь воспроизводить доказательство теоремы Пифагора, применять ее в решении типичных задач.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 15 мин	Теорема Пифагора и ее следствия
3	Решение задач — 18 мин	Задачи № 11, 6 (2), № 5 (устно)
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 3-5. Задачи № 2 (1), 3 (1), 6 (1)

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 1 и 2, решение задач № 1 (1 и 4).

Для проверки усвоения определения косинуса острого угла прямоугольного треугольника можно предложить учащимся устные задания:

Используя данные, указанные на рис. 7.9, найдите косинус угла α в каждом из данных треугольников. Ответ обоснуйте.

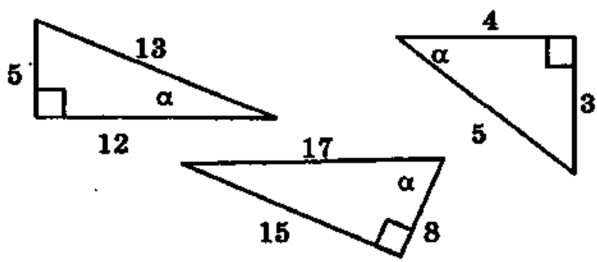


Рис. 7.9

При проверке решения задачи 1 нужно вспомнить не только как применяется в решении определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника, но и способ построения прямоугольного треугольника по катету и гипотенузе.

II. Изучение нового материала

1. Перед доказательством теоремы Пифагора полезно повторить с учащимися основное свойство пропорции:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc .$$

2. Вводится формулировка теоремы Пифагора.

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Для осознанного восприятия формулировки необходимо на конкретном примере пояснить ее смысл.

Задание 1. *Дан прямоугольник ABCD со сторонами 3 см и 4 см. Найдите длину его диагонали.*

Изобразив на доске прямоугольник и проведя в нем диагональ (рис. 7.10), учитель задает вопросы:

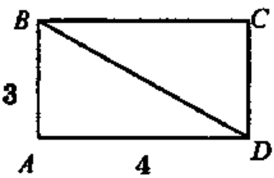


Рис. 7.10

1) Рассмотрим треугольник ABD. Почему он прямоугольный?

2) Какая сторона этого треугольника является гипотенузой?

3) Какие стороны этого треугольника являются катетами?

4) Запишите теорему Пифагора для треугольника ABD.

5) Вычислите BD.

3. По ходу доказательства теоремы на доске и в тетрадях выполняются записи.

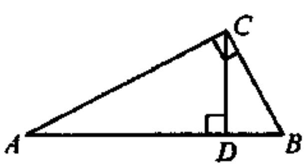


Рис. 7.11

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$.

Доказать: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

1) Пусть $CD \perp AB$ (рис. 7.11).

2) ΔADC: $\cos A = \dfrac{AD}{AC}$, ΔABC: $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$,

тогда $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$, $AC^2 = AD \cdot AB$.

3) ΔCDB: $\cos B = \dfrac{DB}{BC}$, ΔABC: $\cos B = \dfrac{BC}{AB}$,

тогда $\dfrac{DB}{BC} = \dfrac{BC}{AB}$, $BC^2 = DB \cdot AB$.

4) $AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + DB \cdot AB = AB \cdot (AD + DB) = AB^2$.

3. Для закрепления теоремы учащимся предлагаются следующие устные задания на вычисление:

Задание 2. Катеты прямоугольного треугольника 6 см и 8 см. Вычислите гипотенузу треугольника.

Ответ: 10 см.

Задание 3. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а один из катетов 8 см. Найдите второй катет.

Ответ: 6 см.

4. Вопросами для повторения предусматриваются доказательства следствий из теоремы Пифагора. Эти доказательства просты и в явном виде в учебном пособии отсутствуют. При разборе этих доказательств в классе можно предложить учащимся записать их в тетради.

Следствие 1.

В прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы.

Доказательство.

В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 7.12) по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Так как $BC^2 > 0$, то $AC^2 < AB^2$, то есть $AC < AB$.

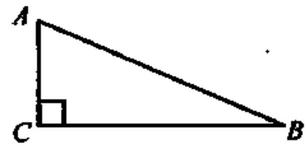


Рис. 7.12

Следствие 2.

Для любого острого угла α $\cos\alpha < 1$.

Доказательство.

В треугольнике ABC (рис. 7.12) $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$. По доказанному $AC < AB$, значит, $\dfrac{AC}{AB} < 1$.

III. Решение задач

Решить задачу № 11

Дано: ΔABC, $AB = a$, $BC = AC = b$, CD — медиана (рис. 7.13).

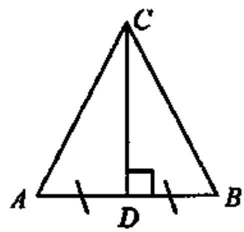


Рис. 7.13

Найти: CD.

Решение.

1) $CD \perp AB$ (как медиана к основанию равнобедренного треугольника).

2) ΔACD — прямоугольный, по теореме Пифагора $AD^2 + CD^2 = AC^2$, $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + CD^2 = b^2$,

отсюда $CD^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $CD = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

Решить задачу № 6 (2)

Дано: $ABCD$ — ромб, $AC = 30$ дм, $BD = 16$ дм (рис. 7.14).

Найти: AB.

Решение.

1) $BD \perp AC$, $AO = \frac{1}{2}AC = 15$ дм, $BO = \frac{1}{2}BD = 8$ дм (по свойствам диагоналей ромба).

2) ΔAOB — прямоугольный, по теореме Пифагора $AO^2 + BO^2 = AB^2$, $AB^2 = 225 + 64 = 289$, $AB = 17$ дм.

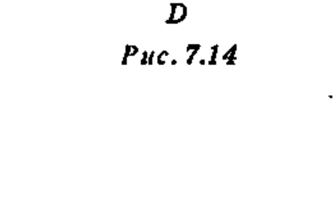


Рис. 7.14

Ответ: 17 дм.

Решить задачу № 5 (устно)

Решение. Если стороны треугольника пропорциональны числам 5, 6 и 7, то их можно обозначить $5x$, $6x$ и $7x$. Если этот треугольник прямоугольный, то его гипотенуза — наибольшая сторона, т.е. $(7x)^2 = (5x)^2 + (6x)^2$, однако $49x^2 \neq 25x^2 + 36x^2$, т.е треугольник не является прямоугольным.

Ответ: не могут.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 3–5. Решить задачи № 2 (1), 3 (1), 6 (1).

Указания к задачам

2. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$. Тогда:

1) $c^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, $c = 5$;

2) $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, $c = \sqrt{2}$;

3) $c^2 = 5^2 + 6^2 = 61$, $c = \sqrt{61}$.

3. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, $b^2 = c^2 - a^2$. Тогда:

1) $b^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, $b = 4$;

2) $b^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, $b = 12$;

3) $b^2 = 6^2 - 5^2 = 11$, $b = \sqrt{11}$.

6. Решение задач 6 (1 и 3) аналогично решению задачи 6(2), приведенному выше.

Дополнительные задачи

1. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 13 см, катет AC равен 12 см. Найдите $\cos B$.

Ответ: $\frac{5}{13}$

2. Найдите стороны прямоугольного треугольника, если один катет в 2 раза больше другого, гипотенуза равна $3\sqrt{5}$ см.

Ответ: 3 см и 6 см.

Урок 23

ТЕМА: Египетский треугольник. Перпендикуляр и наклонная

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение наклонной к прямой и проекции наклонной на прямую, свойства наклонных и их проекций;

уметь применять теорему Пифагора в решении задач, требующих распознать прямоугольный треугольник в заданной фигуре, применять свойства наклонных и их проекций в решении несложных задач.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 17мин	Понятие египетского треугольника, наклонная к прямой, ее проекция, свойства наклонных и их проекций, теорема, обратная теореме Пифагора, задача № 17
3	Решение задач — 16 мин.	Задача № 19, дидактические задачи на закрепление нового материала
4	Домашнее задание — 2 мин.	Контрольный вопрос 6. Задачи № 3(2), 8, 18

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 3–5, решение задач № 2 (1), 3 (1), устно, № 6 (1) с выполнением рисунка на доске. При обсуждении решения задачи № 6 необходимо обратить внимание учащихся на обоснование того факта, что треугольник, составленный из половин диагоналей и стороны ромба, является прямоугольным (по свойству диагоналей ромба).

II. Изучение нового материала

1. *Решить задачу № 17*

Докажите, что если треугольник имеет стороны a, b, c и $a^2 + b^2 = c^2$, то у него угол, противолежащий стороне c, прямой.

Дано: $\triangle ABC$: $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Доказать: $\angle C = 90°$.

Доказательство.

1) Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 7.15), в котором $\angle C_1 = 90°$, $B_1C_1 = BC$, $A_1C_1 = AC$. По теореме Пифагора $A_1C_1^2 + B_1C_1^2 = A_1B_1^2$. Тогда $A_1B_1 = AB$.

2) $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по трем сторонам. Следовательно, $\angle C = \angle C_1 = 90°$.

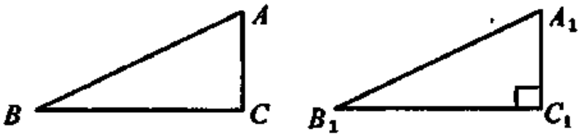


Рис. 7.15

После решения задачи следует обратить внимание учащихся на то, что в ней сформулирована теорема, обратная теореме Пифагора. Ее можно также сформулировать следующим образом:

Если в треугольнике сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны, то этот треугольник — прямоугольный.

2. Предложив учащимся проверить, является ли прямоугольным треугольник со сторонами, равными 3, 4 и 5 единицам, учитель сообщает учащимся, что такие треугольники называют *египетскими*. Поскольку речь идет о любых единицах измерения длины, то египетским треугольником можно считать любой треугольник, стороны которого пропорциональны числам 3, 4 и 5.

3. *Определение перпендикуляра к прямой* было дано в § 2 учебника. Сейчас необходимо с учащимися повторить смысл этого определения:

Отрезок ВА называют перпендикуляром к прямой а, если прямая ВА перпендикулярна прямой а, А — точка их пересечения, точку А называют основанием перпендикуляра (рис. 7.16, а).

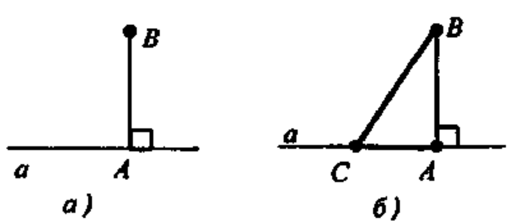


Рис. 7.16

После этого рисунок дополняется и вводятся *определения наклонной и ее проекции*:

Если BA — перпендикуляр к прямой a, C — точка прямой a, отличная от A, то отрезок BC называют наклонной к прямой a, точку C называют основанием наклонной, а отрезок AC — проекцией наклонной BC на прямую a (рис. 7.16, б).

Необходимо подчеркнуть, что и перпендикуляр, и наклонная, и проекция наклонной — это отрезки.

4. Для усвоения введенной терминологии можно предложить учащимся по рисунку 7.17 назвать:

а) наклонные к прямой a и их основания;

б) перпендикуляр и его основание;

в) проекцию каждой наклонной.

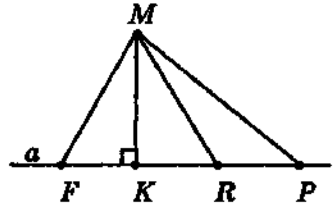


Рис. 7.17

5. *Следствие из теоремы Пифагора*, сформулированное для перпендикуляра и наклонных, целесообразно разделить на три отдельных утверждения.

Следствие 3.

Если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонная, то наклонная больше перпендикуляра.

Для доказательства достаточно указать, что перпендикуляр — это катет прямоугольного треугольника, наклонная — гипотенуза, а в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов.

Следствие 4.

Если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонные, то равные наклонные имеют равные проекции.

Доказательство.

В прямоугольных треугольниках MKF и MKR (рис. 7.17) по теореме Пифагора $FK^2 = MF^2 - MK^2$ и $KR^2 = MR^2 - MK^2$, а так как $MF = MR$, то и $FK = KR$.

Следствие 5.

Если к прямой из одной точки проведены две наклонные, то больше из них та, у которой проекция больше.

Доказательство.

В прямоугольных треугольниках MKR и MKP (рис. 7.17) по теореме Пифагора $MR^2 = MK^2 + KR^2$, а $MP^2 = MK^2 + KP^2$, но так как $KP > KR$, то и $MP > MR$.

III. Решение задач

Решить задачу 1

Длина наклонной 10 см, а перпендикуляра 6 см. Чему равна проекция наклонной?

Ответ: 8 см.

Решить задачу 2

Наклонная длиной 13 см имеет проекцию 12 см. Вычислите длину перпендикуляра.

Ответ: 5 см.

Решить задачу 3

Проверьте, является ли прямоугольным треугольник со сторонами а) 17, 15, 8; б) 2, 4, $2\sqrt{5}$; в) 4, 6, 8.

Ответ: а) да; б) да; в) нет.

Решить задачу № 19

Решение задачи приведено в учебнике. Однако для лучшего понимания решения полезно предварительно пояснить с помощью рисунков (рис. 7.18, *а*) рассуждение о том, что если D — точка на прямой AB, а X — точка отрезка AB, то DX меньше либо AD, либо BD.

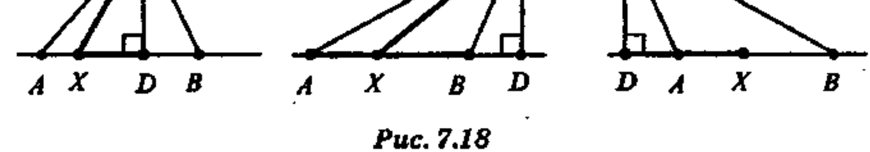


Рис. 7.18

Решение.

1) Пусть CD — высота в ΔABC. Как бы ни располагалось основание высоты D (см. рис. 7. 18, *б*), либо $DX < AD$, либо $DX < BD$.

2) По свойству наклонных и их проекций: $DX < AD \Rightarrow CX < AC$, $DX < BD \Rightarrow CX < BC$.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольный вопрос 6. Решить задачи № 3(2), 8, 18.

Указания к задачам

8. По теореме Пифагора квадрат диагонали равен $a^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$, тогда $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

18. Так как $13^2 = 12^2 + 5^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, против стороны, равной 13, лежит прямой угол.

Дополнительные задачи

1. Из точки M к прямой a проведены перпендикуляр MK и две наклонные $MA = 20$ см и $MB = 15$ см. Найдите расстояние AB, если известно, что $MK = 12$ см.

О т в е т: 7 см или 25 см.

2. Найдите стороны треугольника ABC, если его высота CH равна 12 м, а точка H делит сторону AB на отрезки $AH = 9$ м и $BH = 16$ м.

О т в е т: 15 м, 20 м, 25 м.

Замечание. ΔACH и ΔBCH — египетские: в первом катеты равны $3 \cdot 3$ м и $4 \cdot 3$ м, значит, гипотенуза равна $5 \cdot 3$ м $= 15$ м; во втором катеты равны $3 \cdot 4$ м и $4 \cdot 4$ м, значит, гипотенуза равна $5 \cdot 4$ м $= 20$ м.

Урок 24

ТЕМА: Неравенство треугольника

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

1. Доказательство теоремы (неравенство треугольника) состоит из перебора всех возможных ситуаций расположения трех то-

чек на плоскости: а) все три точки совпадают; б) две из трех точек совпадают; в) три различные точки лежат на одной прямой; г) три различные точки не лежат на одной прямой. В первых трех случаях точки располагаются на одной прямой и доказываемое для них (нестрогое) неравенство треугольника используется затем при доказательстве случая, когда точки не лежат на одной прямой. В этом наиболее часто встречающемся случае неравенство треугольника является строгим.

Так, чтобы доказать, например, неравенство $AB < AC + BC$, из точки C опускается перпендикуляр CD на прямую AB. Тогда точки A, B и D лежат на одной прямой и независимо от того, как они на ней расположены, различные они или какие-нибудь совпадают, для них доказано, что $AB < AD + BD$, а так как $AD < AC$ или $BD < BC$, то верно неравенство $AB < AC + BC$. Таким образом, хотя в учебном пособии рисунок, иллюстрирующий последний случай, отражает лишь тот вариант расположения точек A, B и D, когда D лежит между A и B, доказательство не опирается на рисунок и полностью охватывает все случаи.

В учебнике случаю расположения трех точек в вершинах треугольника уделяется большое внимание в связи с тем, что именно этот случай находит широкое применение при решении задач. Этот факт нашел отражение и в вопросах для повторения. Наряду с вопросом 7: «Докажите неравенство треугольника», который предполагает доказательство утверждения теоремы для всех случаев расположения трех точек, содержится вопрос 8: «Докажите, что в треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон».

Основное внимание при изучении этого материала следует уделить практическим умениям применять неравенство треугольника. Доказательство теоремы можно объяснить учащимся, но не требовать его обязательного усвоения.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение расстояния между произвольными точками плоскости, формулировку теоремы 7.3 и ее частного случая;

уметь применять неравенство треугольника в решении задач.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 10мин	Понятие расстояния между точками, теорема о неравенстве треугольника
3	Решение задач — 23 мин	Задачи № 23, 24(1), 33, 37, 38 (второй вопрос)
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 7, 8 (без доказательства). Задачи № 32, 36, 38 (первый вопрос)

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопрос 6. Решить задачи № 3(2), 8, 18 устно с выполнением рисунка на доске.

II. Изучение нового материала

1. Напомним учащимся известное им из курса VII класса понятие расстояния между двумя различными точками.

Расстоянием между точками A и B называют длину отрезка AB, причем по аксиоме измерения отрезков оно положительно.

Теперь понятие расстояния распространяется и на случай, когда точки совпадают.

Если точки A и B совпадают, то расстояние между ними равно нулю.

2. Как уже упоминалось, доказательство теоремы 7.3 (неравенство треугольника) представляет собой разбор всех возможных случаев взаимного расположения трех точек на плоскости:

а) все три точки совпадают или из трех точек совпадают две;

б) точки различные и лежат на одной прямой;

в) точки различные и лежат в вершинах треугольника.

а) Доказательство теоремы для первых двух случаев в учебнике опущено. Воспроизведение его на уроке не является целесообразным. Однако если соответствующий вопрос возникнет у учащихся, то учитель может объяснить, что если три точки совпадают, то все три расстояния $AB = BC = AC = 0$, если же две точки совпадают, то одно из расстояний равно 0, а два других равны между собой. Таким образом, в обоих случаях каждое расстояние не больше суммы двух других.

б) Три точки A, B, C различны и лежат на одной прямой. Одна из них, пусть точка B, лежит между двумя другими (рис. 7.19), тогда верно равенство $AC = AB + BC$. Так как AB и BC положительны, то каждое из слагаемых меньше суммы. Значит, каждое из трех расстояний не больше суммы двух других.

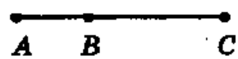


Рис. 7.19

в) Докажем, что если A, B и C различны и не лежат на одной прямой, то каждое расстояние строго меньше суммы двух других. Например, докажем, что $AB < AC + BC$.

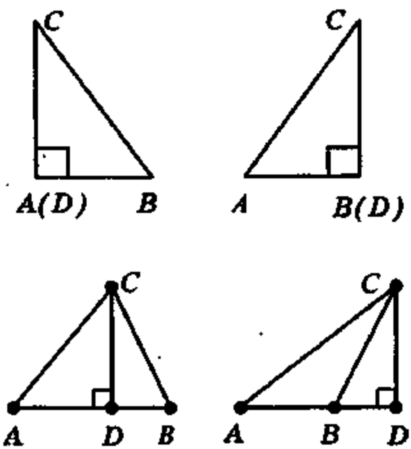


Рис. 7.20

1) Опустим перпендикуляр CD на прямую AB. Т.к. точки A, B и D принадлежат одной прямой, то $AB \leq AD + BD$ (доказано выше).

2) Если точка D совпадает с одной из точек A и B (рис. 7.20), то $AD < AC$ и $BD < BC$, т.к. катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы, а расстояние между совпадающими точками равно 0.

3) Если точка D не совпадает ни с одной из точек A и B, то $AD < AC$ и $BD < BC$, т.к. катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы.

4) Тогда во всех случаях $AB < AC + BC$.

3. Для закрепления теоремы можно предложить учащимся задания:

Задание 1. *Даны три точки M, N, K. Запишите для них неравенство треугольника.*

Задание 2. *Точки M, N, K являются вершинами треугольника. Запишите для них неравенство треугольника.*

Задание 3. *Существует ли треугольник со сторонами: а) 13 см, 4 см, 8 см; б) 10 см, 7 см, 3 см?*

Задание 4. *Стороны равнобедренного треугольника равны 10 см и 4 см. Какая их них является основанием?*

III. Решение задач

Решить задачу № 23

Задача решена в учебнике. Ее можно решить устно, выполнив на доске только рисунок (рис. 7.21) и запись неравенств.

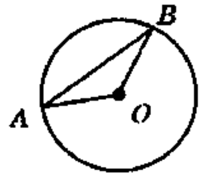


Рис. 7.21

Р е ш е н и е.

1) Если $O \notin AB$, то в ΔAOB $AB < AO + OB$.

2) Если $O \in AB$, то $AB = AO + OB$.

Решить задачу № 24(1)

Р е ш е н и е.

Все три точки различны, так как ни одно расстояние не равно нулю. Если точки не лежат на одной прямой, то они являются вершинами треугольника ABC, причем каждая его сторона меньше суммы двух других сторон. Из условия следует, что $AC = AB + BC$ (т.к. $12 = 5 + 7$), т. е. не выполняется неравенство $AC < AB + BC$, значит, точки не могут быть вершинами треугольника, т. е. лежат на одной прямой.

Решить задачу № 33

Р е ш е н и е.

Пусть стороны треугольника равны a, b и c. По неравенству треугольника: $a < b + c$, $a + a < a + b + c$, $2a < a + b + c$, $a < \dfrac{a+b+c}{2}$.

Решить задачи № 37 и 38 (второй вопрос)

Могут ли пересекаться окружности радиусами 6 см и 12 см, центры которых находятся на расстоянии 5 см?

Докажите, что в задаче 37 окружность радиуса 6 см находится внутри окружности радиуса 12 см.

Решение.

1) Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, тогда $O_1O_2 = 5$ см.

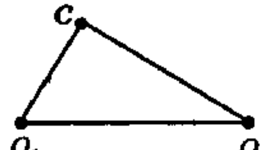


Рис. 7.22

Если окружности пересекаются в точке C (рис. 7.22), то $O_1C = 6$ см, $O_2C = 12$ см.

По неравенству треугольника должно выполняться $O_2C \le O_1O_2 + O_1C$, но это неравенство не выполняется, т.к. $O_2C = 12$ см, а $O_1O_2 + O_1C = 11$ см. Значит, окружности не могут пересекаться.

2) Пусть M — произвольная точка окружности с центром O_1. Тогда $O_1M = 6$ см. По неравенству треугольника $O_2M \le O_1O_2 + O_1M$, т.е. $O_2M \le 11$ см, а это означает, что точка M лежит внутри окружности с центром O_2 и радиусом 12 см (рис. 7.23).

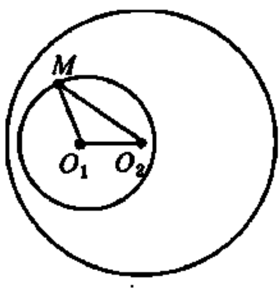


Рис. 7.23

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 7, 8 (без доказательства). Решить задачи № 32, 36, 38 (первый вопрос).

Указания к задачам

32. Если стороны треугольника равны a, $2a$ и $3a$, то по неравенству треугольника должно выполняться $3a < a + 2a$, но это неравенство не выполняется. Значит, треугольника с такими сторонами не существует.

36. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, тогда $O_1O_2 = 20$ см. Если окружности пересекаются в точке C (рис. 7.22), то $O_1C = 8$ см, $O_2C = 11$ см. По неравенству треугольника должно выполняться неравенство $O_1O_2 \leq O_1C + O_2C$, но оно не выполняется, т.к. $O_1O_2 = 20$ см, а $O_1C + O_2C = 19$ см. Значит, окружности не могут пересекаться.

38. Пусть M — точка окружности с центром O_1. Тогда $O_1M = 8$ см. По неравенству треугольника $O_2M + O_1M \geq O_1O_2$, откуда $O_2M \geq O_1O_2 - O_1M$, т.е. $O_2M \geq 12$ см, а это означает, что точка M лежит вне окружности с центром O_2 и радиусом 11 см (рис. 7.24).

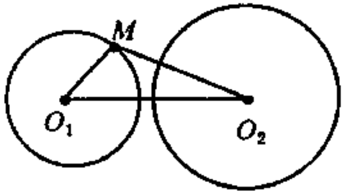


Рис. 7.24

Урок 25

ТЕМА: Решение задач

КОММЕНТАРИЙ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

На уроке рассматриваются задачи, которые не только вырабатывают умения применять изученные геометрические факты, но и играют определенную теоретическую роль, так как направлены на обобщение и систематизацию изученных сведений. Так, кроме непосредственного применения теоремы Пифагора рассматриваются различные фигуры, изучавшиеся ранее, и их свойства, которые позволяют применять теорему Пифагора для вычисления элементов. Неравенство треугольника дополняется обратным утверждением, сформулированным в задаче № 41. Доказательство этого утверждения (оно опирается на результат решения задачи № 40) весьма громоздко и занимает много времени. Оно может не рассматриваться на уроке. Это доказательство можно оставить для кружковых или факультативных занятий.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

уметь применять теорему Пифагора в решении задач, где требуется распознать прямоугольный треугольник, используя изученные свойства геометрических фигур.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 8 мин	
2	Решение задач — 20 мин	Задачи № 42 (устно), 25, 27, дидактические задачи на теорему Пифагора
3	Самостоятельная работа — 10 мин	
4	Домашнее задание — 2 мин	Задачи № 26, 34

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 7, 8 (без доказательства), решение задач № 32, 36, 38 (первый вопрос). При проверке решения задачи 38 можно предложить учащимся выполнить построение окружностей, о которых идет речь в задаче 36. Вместе с тем для доказательства необходимо использовать неравенство треугольника, чтобы убедиться, что все точки одной окружности лежат вне другой окружности.

II. Решение задач

1. Учащимся предлагается повторить еще раз формулировку «строгого» неравенства треугольника:

В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.

После этого учитель формулирует обратное утверждение (или предлагает прочитать его формулировку в задаче № 41). Это утверждение принимаем без доказательства.

Если каждое из трех положительных чисел a, b и c меньше суммы двух других, то существует треугольник со сторонами a, b и c.

Для закрепления этого утверждения рассмотрим следующую задачу.

Решить задачу № 42 (устно)

Можно ли построить треугольник со сторонами:

1) $a = 1$ см, $b = 2$ см, $c = 3$ см;
2) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см;
3) $a = 3$ см, $b = 7$ см, $c = 11$ см;
4) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 9$ см?

Решение.

1) Нет, т.к. $3 = 1 + 2$;
2) да, т.к. каждое из чисел меньше суммы двух других;
3) нет, т.к. $11 > 3 + 7$;
4) нет, т.к. $9 = 4 + 5$.

Замечание. Ответы на вопросы 1, 3 и 4 обосновываются неравенством треугольника, а существование треугольника при ответе на вопрос 2 — обратным утверждением, сформулированным в задаче 41.

2. Прежде чем перейти к решению задач на теорему Пифагора, необходимо вспомнить с учащимися случаи, в которых появляются прямоугольные треугольники (рис. 7.25):

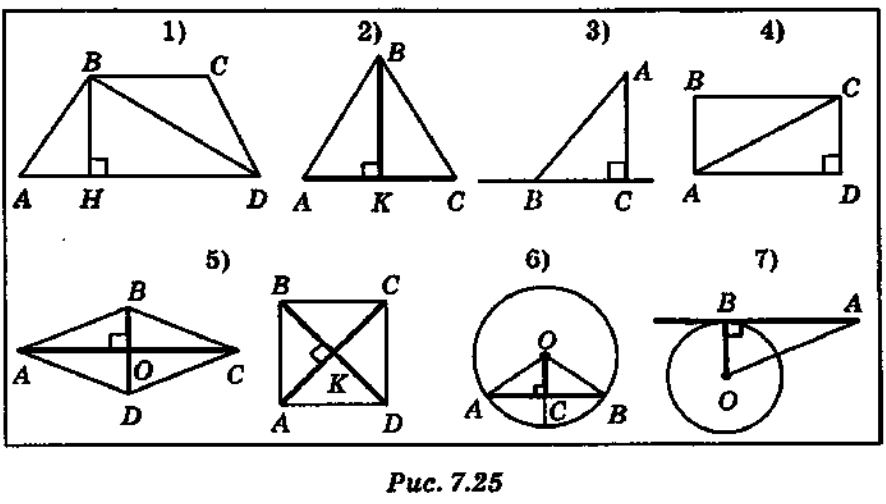


Рис. 7.25

1) проведение высоты в треугольнике, параллелограмме или трапеции;

2) проведение медианы к основанию равнобедренного треугольника;

3) проведение наклонной и перпендикуляра к прямой;

4) проведение диагонали в прямоугольнике и квадрате;

5) проведение двух диагоналей в ромбе и квадрате;

6) проведение радиуса, перпендикулярного хорде окружности;

7) проведение радиуса в точку касания окружности и касательной.

Используя рисунки, можно также предложить учащимся указать, как применяется в каждом конкретном треугольнике теорема Пифагора (например, в случае (1) в ΔABH: $AB^2 = AH^2 + BH^2$, в ΔDBH: $BD^2 = BH^2 + DH^2$).

Решить задачу

Высота равнобедренного треугольника 16 см, а основание 24 см. Чему равна боковая сторона?

Решение (рис. 7.26).

1) Если BK — высота в ΔABC и $AB = BC$, то BK — медиана, т.е. $AK = 24 : 2 = 12$ (см).

2) ΔABK — прямоугольный, по теореме Пифагора $AB^2 = 12^2 + 16^2 = 400$, $AB = 20$ см.

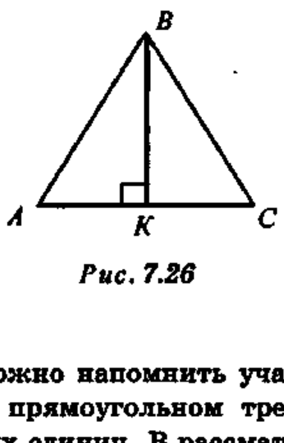


Рис. 7.26

Ответ: 20 см.

Замечание. На примере этой задачи можно напомнить учащимся о ***египетском треугольнике*** — прямоугольном треугольнике со сторонами 3, 4 и 5 некоторых единиц. В рассматриваемой задаче данные катеты равны $3 \cdot 4$ см и $4 \cdot 4$ см, т.е можно считать, что они равны 3 ед. и 4 ед. Тогда гипотенуза равна 5 ед., т.е. $5 \cdot 4$ см $= 20$ см.

Решить задачу

К окружности с центром O и радиусом 24 см проведена касательная, на которой взята точка M. Найдите расстояние от точки M до точки касания, если OM = 40 см.

Р е ш е н и е (рис. 7.27).

1) Т.к. MB — касательная, то $OB \perp BM$.

2) ΔOBM — прямоугольный, по теореме Пифагора $OM^2 = OB^2 + BM^2$, $40^2 = 24^2 + BM^2$, $BM^2 = 40^2 - 24^2 = (40 - 24)(40 + 24) = 16 \cdot 64$, тогда $BM = 4 \cdot 8 = 32$ (см).

О т в е т: 32 см.

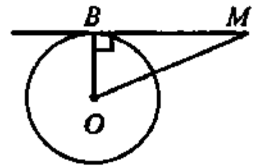


Рис. 7.27

Решить задачу

Из центра окружности проведен перпендикуляр OC к хорде AB. Найдите длину хорды, если радиус окружности равен 10 см, OC = 5 см.

Р е ш е н и е.

1) ΔAOC — прямоугольный (рис. 7.28), по теореме Пифагора $OA^2 = OC^2 + AC^2$, $10^2 = 5^2 + AC^2$, $AC^2 = 100 - 25 = 75 = 3 \cdot 25$, тогда $AC = 5\sqrt{3}$ см.

2) Т.к. $OC \perp AB$, то C — середина хорды AB, т.е. $AB = 10\sqrt{3}$ см.

О т в е т: $10\sqrt{3}$ см.

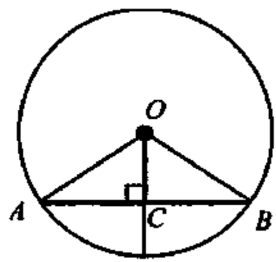


Рис. 7.28

Решить задачу № 25

Замечание. Прежде чем перейти к доказательству, нужно в треугольнике со сторонами a, b и c для произвольной стороны а доказать, что она меньше и $b - c$, и $c - b$.

Р е ш е н и е.

Пусть a, b и c — длины сторон треугольника. По теореме о неравенстве треугольника $a + b > c$ и $a + c > b$, откуда следует, что $a > c - b$ и $a > b - c$. Значит, независимо от того, какая из сторон b и c больше, их разность меньше третьей стороны.

Решить задачу № 27

Р е ш е н и е.

Пусть a — неизвестная сторона треугольника. Тогда по неравенству треугольника $a < 1{,}9 + 0{,}7 = 2{,}6$ (м), а по доказанному в задаче 25 $a > 1{,}9 - 0{,}7 = 1{,}2$ (м). Т. к. a — целое, то $a = 2$ м.

III. Самостоятельная работа

1. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведенную к основанию, если боковая сторона равна 5 см, основание равно 8 см. О т в е т: 3 см.

2. Найдите диагональ ромба, если другая диагональ равна 4, а сторона ромба равна $2\sqrt{5}$. О т в е т: 8.

IV. Домашнее задание

Решить задачи № 26, 34.

Указания к задачам

26. Диагональ параллелограмма и две его стороны составляют треугольник, в котором каждая сторона меньше суммы двух других сторон. Так как $7 > 4 + 2$, то параллелограмма с указанными сторонами не существует.

34. Пусть M — точка внутри окружности, K — точка на окружности, O — ее центр.

Если они не лежат на одной прямой, то по неравенству треугольника и по доказанному в задаче 25 верно двойное неравенство: $R - d < KM < R + d$.

Если O лежит на отрезке KM, то $KM = R + d$.

Если M лежит на отрезке OK, то $KM = R - d$.

Таким образом, наибольшее расстояние от точки M до точек окружности равно $R + d$, а наименьшее расстояние равно $R - d$ (рис. 7.29).

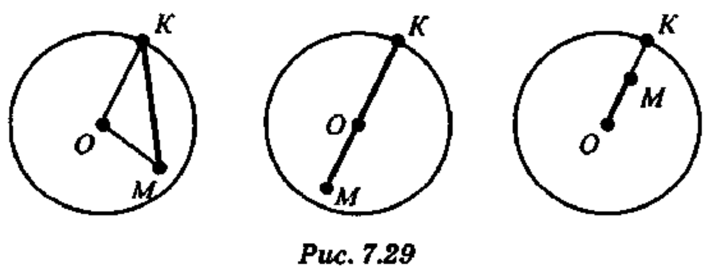


Рис. 7.29

35. Решение аналогично задаче 34. О т в е т: $d + R$ и $d - R$.

39. Нет, т.к. если окружности пересекаются, то по неравенству треугольника $d < R_1 + R_2$.

Дополнительные задачи

1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 26 см, а катеты относятся как 5 : 12. Найдите катеты этого треугольника.

Ответ: 10 см и 24 см.

2. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 7 см, а гипотенуза больше второго катета на 5 см. Вычислите периметр треугольника.

Ответ: 16,8 см.

3. Из точки, взятой вне окружности, проведены к этой окружности две касательные (рис. 7.30). Используя теорему Пифагора, докажите, что длины касательных равны между собой.

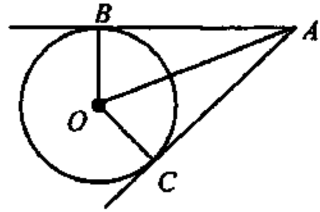


Рис. 7.30

Урок 26

ТЕМА: Решение задач

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

уметь применять теорему Пифагора в решении задач, где требуется распознать прямоугольный треугольник, используя изученные свойства геометрических фигур.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 8 мин	
2	Анализ выполнения самостоятельной работы — 5 мин	

№	Этап урока	Содержание работы
3	Решение задач — 25 мин	Задачи № 6(3), 7, 10, 13, 14(1), 12
4	Домашнее задание — 2 мин	Задачи № 14(2), 16

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить решение задач № 26, 34. При проверке решения задачи 34 можно обсудить с учащимися возможные случаи взаимного расположения центра O окружности, точки K на окружности и точки M внутри окружности. Нужно выяснить, что точка K не может лежать между точками O и M. Затем для каждого из возможных случаев записываем соответствующие равенства или неравенства и выбираем наибольшее и наименьшее значения длины отрезка KM.

II. Анализ выполнения самостоятельной работы

Вычислительная часть решения задач самостоятельной работы записывается на доске, обоснования проводятся устно.

III. Решение задач

Решить задачу № 6(3)

Решение (рис. 7.31).

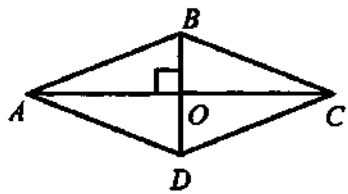


Рис. 7.31

1) $BD \perp AC$, $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}$ м, $BO = \frac{1}{2}BD = 6$ м (по свойствам диагоналей ромба).

2) ΔAOB — прямоугольный, по теореме Пифагора $AB^2 = \frac{25}{4} + 36 = \frac{25+144}{4} = \frac{169}{4}$, $AB = \frac{13}{2} = 6{,}5$ (м).

Ответ: 6,5 м.

Решить задачу № 7

Решение.

ΔABC — прямоугольный (рис. 7.32), по теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2$, $AC^2 = 91^2 + 60^2 = 8281 + 3600 = 11\,881$, $AC = 109$ см.

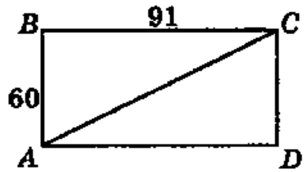


Рис. 7.32

Замечание. Полезно показать учащимся прием, при помощи которого можно без использования калькулятора найти $\sqrt{11881}$. Сравнив число 11881 с числами $10\,000 = 100^2$ и $12\,100 = 110^2$, и учитывая, что число 11 881 оканчивается на цифру 1, т.е. число $\sqrt{11881}$ (если корень извлекается) оканчивается на 1 или 9, можно предположить, что искомое число равно 109, и проверить это, возведя его в квадрат.

Решить задачу № 10

Решение.

1) BH и CK — высоты трапеции (рис. 7.33), тогда $AH = DK = \dfrac{AD - BC}{2}$ (по свойству равнобокой трапеции), $AH = 3$ м.

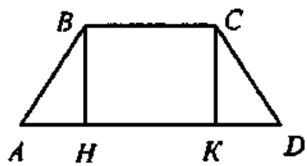


Рис. 7.33

2) ΔABH — прямоугольный, по теореме Пифагора $AB^2 = AH^2 + BH^2$, тогда $16 = 9 + BH^2$, $BH^2 = 7$, $BH = \sqrt{7}$ м.

Решить задачу № 13

Решение.

1) Если BD — высота в ΔABC (рис. 7.34), то BD — и медиана (по свойству равнобедренного треугольника), т.е. $AD = CD = \dfrac{a}{2}$.

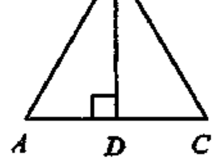


Рис. 7.34

2) ΔABD прямоугольный, по теореме Пифагора $AB^2 = AD^2 + BD^2$, $BD^2 = a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 =$

$$= a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}, \; BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Решить задачу № 63 (2)

Р е ш е н и е. 1) Т.к. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то $\sin^2\alpha = 1 - \dfrac{15^2}{17^2} =$
$= \dfrac{17^2 - 15^2}{17^2} = \dfrac{2 \cdot 32}{17^2} = \dfrac{8^2}{17^2}$, $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$.

2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{8}{17} : \dfrac{15}{17} = \dfrac{8}{15}$.

Решить задачу № 64 (2)

Р е ш е н и е. 1) Т.к. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то $\cos^2\alpha = 1 - \dfrac{40^2}{41^2} =$
$= \dfrac{41^2 - 40^2}{41^2} = \dfrac{1 \cdot 81}{41^2} = \dfrac{9^2}{41^2}$, $\cos\alpha = \dfrac{9}{41}$.

2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{40}{41} : \dfrac{9}{41} = \dfrac{40}{9}$.

V. Домашнее задание

Ответить на контрольный вопрос 11 (без доказательства). Решить задачи № 62 (1, 7), 63 (1), 64 (1).

Указания к задачам

62. 1) $1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$. 7) $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \cos^2\alpha\,(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) =$
$= \cos^2\alpha \cdot \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1$.

63 (1). $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{5^2}{13^2} = \dfrac{169 - 25}{13^2} = \dfrac{144}{13^2} = \dfrac{12^2}{13^2}$, $\sin\alpha =$
$= \dfrac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{12}{13} : \dfrac{5}{13} = \dfrac{12}{5}$.

64 (1). $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \dfrac{3^2}{5^2} = \dfrac{25 - 9}{5^2} = \dfrac{4^2}{5^2}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha =$
$= \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{5} : \dfrac{4}{5} = \dfrac{3}{4}$.

Дополнительные задачи

1. Вычислите значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если: а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

Ответ: а) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; б) $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Урок 34

ТЕМА: Изменение синуса, косинуса и тангенса при возрастании угла

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Теоретический материал, который изучается на уроке, играет вспомогательную роль. С помощью рассматриваемой теоремы обосновываются правила учета поправок при работе с таблицами синусов, косинусов и тангенсов острых углов. Кроме того, используя эту теорему, можно обосновать утверждение «В прямоугольном треугольнике против большего острого угла лежит больший катет» и обратное утверждение, которые являются частными случаями более общих утверждений: «В треугольнике против большего угла лежит бóльшая сторона» и обратное утверждение.

Усвоения этой теоремы можно в обязательном порядке не требовать от учащихся, а лишь объяснить, что означает ее формулировка и как она применяется при решении задач. Доказательство теоремы можно рассказать учащимся и не требовать его воспроизведения.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

уметь применять теорему 7.5 в решении задач.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 10 мин	
2	Изучение нового материала — 8 мин	Теорема об изменении синуса, косинуса и тангенса при возрастании острого угла
3	Решение задач — 20 мин	Задачи № 72 (1, 3), 73, 63(3), 65(2, 5)
4	Домашнее задание — 2 мин	Задачи № 64(3), 65(4), 72(4, 5), 74

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопрос 11 (без доказательства), решение задач № 62 (1, 7), 63 (1), 64 (1). При проверке решения задач выполняются записи преобразования выражений на доске. Полезно показать учащимся, как можно решить задачи 63 и 64 без использования тригонометрических тождеств. В этом случае решение опирается на определения синуса, косинуса и тангенса острого угла. Приведем, например, решение задачи 63(1).

Рассмотрим прямоугольный треугольник, в котором косинус одного из углов равен $\frac{5}{13}$, например ΔABC, в котором $\angle C = 90°$, гипотенуза $AB = 13$ и катет $AC = 5$, тогда $\cos A = \frac{5}{13}$. По теореме Пифагора $BC = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, значит, $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5}$.

II. Изучение нового материала

1. Необходимо рассмотреть формулировку теоремы, приведенную в учебнике, и обсудить ее смысл.

При возрастании острого угла $\sin\alpha$ *и* $\operatorname{tg}\alpha$ *возрастают, а* $\cos\alpha$ *убывает.*

Необходимо заметить, что здесь сформулированы три утверждения:

— *при возрастании острого угла* $\sin\alpha$ *возрастает*

— *при возрастании острого угла* $\mathrm{tg}\alpha$ *возрастает;*

— *при возрастании острого* $\cos\alpha$ *убывает.*

Эти утверждения можно переформулировать следующим образом:

Если α ***и*** β ***– острые углы и*** $\alpha < \beta$***, то:***

1) $\sin\alpha < \sin\beta$, 2) $\mathrm{tg}\,\alpha < \mathrm{tg}\,\beta$, 3) $\cos\alpha > \cos\beta$.

2. Для доказательства этих утверждений можно использовать рисунок, отличающийся от приведенного в учебнике своим расположением, так как на нем легче увидеть две наклонные к прямой и их проекции.

Доказательство.

1) Рассмотрим прямую m и перпендикуляр AB к этой прямой (рис. 7.62). Отложим острые углы $\alpha < \beta$ от луча AB в одну полуплоскость. Стороны этих углов пересекают прямую m в точках C и D.

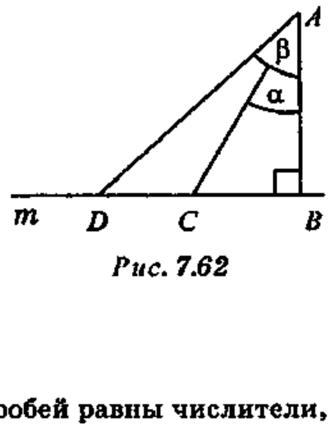


Рис. 7.62

2) Т.к. $\alpha < \beta$, то точка C лежит между точками B и D, т.е. $BC < BD$.

3) AD и AC наклонные к прямой m, а BD и BC — их проекции. По свойству наклонных, проведенных из одной точки, $AC < AD$.

4) $\cos\alpha = \dfrac{AB}{AC}$, $\cos\beta = \dfrac{AB}{AD}$, у этих дробей равны числители, а потому больше та дробь, у которой знаменатель меньше, т.е. $\cos\alpha > \cos\beta$.

5) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{BC}{AB}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{BD}{AB}$, у этих дробей равны знаменатели, а потому больше та дробь, у которой числитель меньше, т.е. $\mathrm{tg}\,\alpha < \mathrm{tg}\,\beta$.

6) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta}$, а т.к. $\cos\alpha > \cos\beta$, то $\sqrt{1-\cos^2\alpha} < \sqrt{1-\cos^2\beta}$, т. е. $\sin\alpha < \sin\beta$.

3. Проверить правильность усвоения теоремы можно с помощью устных вопросов:

1) Дано: $\alpha = 24°$, $\beta = 44°$. Сравните синусы, косинусы и тангенсы данных углов.

Ответ: $\sin\alpha < \sin\beta$; $\cos\alpha > \cos\beta$; $\mathrm{tg}\alpha < \mathrm{tg}\beta$.

2) Известно, что: а) $\sin\alpha > \sin\beta$; б) $\cos\alpha > \cos\beta$; в) $\mathrm{tg}\alpha > \mathrm{tg}\beta$. Что можно сказать об острых углах α и β в каждом случае?

Ответ: а) $\alpha > \beta$; б) $\alpha < \beta$; в) $\alpha > \beta$.

III. Решение задач

Решить задачу № 72 (1, 3)

Ответ: 1) $\alpha > \beta$; 3) т.к. $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$, а $\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$, то $\frac{3}{7} > \frac{2}{5}$, $\alpha < \beta$.

Решить задачу № 73

Решение.

1) Т.к. $\angle A > \angle B$, то $\sin A > \sin B$;

2) ΔABC (рис. 7.63): $\sin A = \frac{BC}{AB}$, $\sin B = \frac{AC}{AB}$; т.к. $\frac{BC}{AB} > \frac{AC}{AB}$, то $BC > AC$.

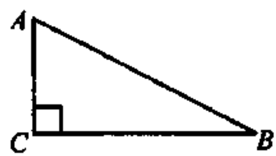


Рис. 7.63

Решить задачу № 63(3)

Решение. 1) Т.к. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то $\sin^2\alpha = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$, $\sin\alpha = 0{,}8$.

2) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3}$.

Решить задачу № 65(2, 5)

Прежде чем приступать к построениям, нужно обсудить данную ситуацию и выработать план решения задачи. Нужно построить прямоугольный треугольник, в котором один из острых углов удовлетворяет данному в задаче условию. В первом случае задано отношение противолежащего катета и гипотенузы, во втором — противолежащего катета и прилежащего катета. Значит, в первом случае нужно построить прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе, а во втором — по двум катетам.

Решение.

№ 65 (2).

1) Строим отрезок $BC = 4$ (рис. 7.64, *а*),

2) строим прямую $CK \perp BC$,

3) строим окружность с центром B и радиусом 7, точку ее пересечения с прямой CK обозначим A.

4) $\angle BAC$ — искомый, т.к. $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{7}$.

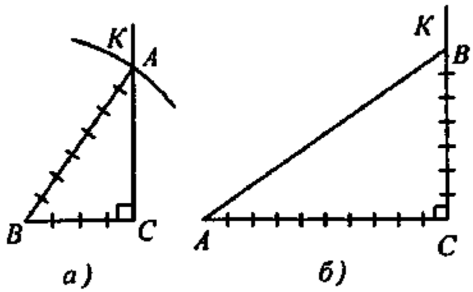


Рис. 7.64

№ 65 (5).

1) Строим отрезок $AC = 10$ (рис. 7.64, *б*),

2) строим прямую $CK \perp AC$,

3) на луче CK откладываем отрезок $CB = 7$,

4) $\angle BAC$ — искомый, т.к. $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{10}$.

IV. Домашнее задание

Решить задачи № 64(3), 65(4), 72(4, 5), 74.

Указания к задачам

64(3). Т.к. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то $\cos^2\alpha = 1 - 0,64 = 0,36$, $\cos\alpha = 0,6$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}$.

65(4). Строим прямоугольный ΔABC по двум катетам: $AC \perp BC$, $AC = 5$, $BC = 3$. Угол BAC – искомый, т.к. $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$.

72(4, 5). 4) Т.к. $\cos\alpha > \cos\beta$, то $\alpha < \beta$, 5) т.к. $\text{tg}\alpha < \text{tg}\beta$, то $\alpha < \beta$.

74. Т.к. $BC > AC$, то $\dfrac{BC}{AB} > \dfrac{AC}{AB}$, т.е. в ΔABC (рис. 7.65): $\sin A > \sin B$, значит, $\angle A > \angle B$.

Дополнительные задачи

1. Из точки A к прямой a проведены две наклонные AB и AC, образующие с ней углы 35° и 70° соответственно. Какая из наклонных имеет бóльшую длину?

Ответ: $AB > AC$.

2. Известно, что $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \sin\alpha < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Какое из указанных неравенств верно?

1) $0° < \alpha < 30°$; 2) $30° < \alpha < 45°$; 3) $45° < \alpha < 60°$; 4) $60° < \alpha < 90°$.

Ответ: Т.к. $\sin 45° < \sin\alpha < \sin 60°$, то правильный ответ 3.

Урок 35

ТЕМА: Решение задач

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

уметь применять теорему Пифагора и неравенство треугольника в усложненной ситуации.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Решение задач — 20 мин	Задачи № 21, 22. Дидактические задачи на закрепление изученного материала

№	Этап урока	Содержание работы
3	Самостоятельная работа — 13 мин	
4	Домашнее задание — 2 мин	Задачи № 9, 43

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить решение задач № 64(3), 65(4), 72(4, 5), 74. Решения могут быть проверены устно, к задачам 65 и 74 можно на доске изобразить рисунки. При проверке решения задачи 64 полезно вспомнить способ решения, не использующий тригонометрических тождеств. Изображаем ΔABC с прямым углом C и с углом A таким, чтобы $\sin A$ был равен 0,8, например, если $BC = 8$, $AB = 10$. По теореме Пифагора находим $AC = 6$, затем вычисляем косинус и тангенс угла A: $\cos A = 0{,}6$; $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$.

II. Решение задач

Решить задачу

Высота BD треугольника ABC равна 8 м. Найдите стороны треугольника, если $AD = 15$ м, $CD = 6$ м.

Решение.

1) ΔBCD: $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ (м);

2) ΔABD: $AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$ (м);

3) Если точка D лежит на стороне AC (рис. 7.65), то $AC = 10 + 17 = 27$ (м), если точка D лежит на продолжении стороны AC, то $AC = 17 - 10 = 7$ (м).

Ответ: $BC = 10$ м, $AB = 17$ м, $AC = 27$ м или $AC = 7$ м.

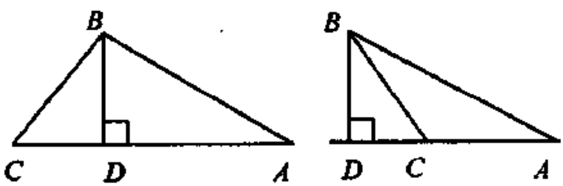


Рис. 7.65

Решить задачу

В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность с радиусом 3. Найдите длину катета AC, если катет BC равен 12.

Решение.

1) Пусть O — центр окружности, M, P и K – точки касания (рис. 7.66). Тогда $OK = OP = r$ и $OP \perp BC$, $OK \perp AC$. Т.к. $CK \perp CP$, то $OKCP$ – прямоугольник, значит, $CP = CK = r = 3$.

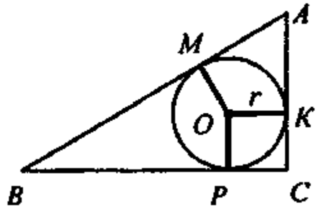


Рис. 7.66

2) По свойству касательных $AM = AK$, $BM = BP$.

Пусть $AM = AK = x$, тогда $AC = x + 3$. $BM = BP = 12 - 3 = 9$.

3) ΔABC: $AB^2 = BC^2 + AC^2$, т. е. $(9 + x)^2 = 12^2 + (x + 3)^2$, $81 + 18x + x^2 = 144 + x^2 + 6x + 9$, $12x = 72$, $x = 6$. Тогда $AC = 6 + 3 = 9$.

Ответ: 9.

Решить задачу № 21

Решение.

1) Пусть CH — перпендикуляр к данной прямой (рис. 7.67), тогда $CH = h$.

2) Отложим от точки H на данной прямой отрезки $HA = HB = \sqrt{l^2 - h^2}$.

Тогда $AC = BC = \sqrt{h^2 + l^2 - h^2} = l$. Т.к. от точки H на данной прямой можно отложить только два отрезка заданной длины, то и наклонных будет только две.

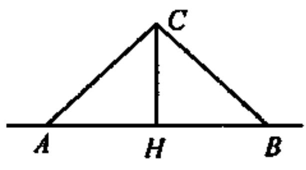


Рис. 7.67

Решить задачу № 22

Решение.

1) Пусть радиус окружности равен R, расстояние от центра окружности до прямой a равно h. Проведем $OH \perp a$ (рис. 7.68), тогда $OH = h$.

2) Из точки O к прямой a можно провести две и только две наклонные длины R (доказано в задаче 21), значит, только две точки прямой a находятся на расстоянии R от центра окружности, т.е. лежат на окружности.

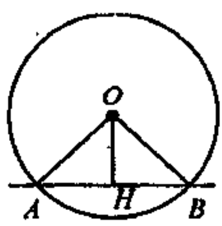


Рис. 7.68

III. Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Найдите AC, используя данные, указанные на рис. 7.69.

Ответ: 8.

2. Найдите EF, используя данные, указанные на рис. 7.70.

Ответ: $6\sqrt{3}$.

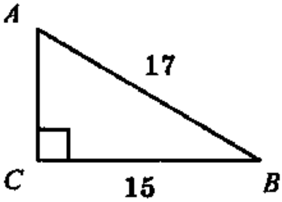


Рис. 7.69

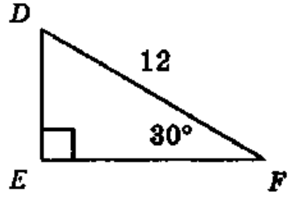


Рис. 7.70

3. Найдите сторону AC треугольника ABC, если высота BH равна $2\sqrt{3}$, $AB = 4\sqrt{3}$, $\angle CBH = 60°$.

Ответ: 12.

вариант 2

1. Найдите BC, используя данные, указанные на рис. 7.71.

Ответ: 12.

2. Найдите EF, используя данные, указанные на рис. 7.72.

Ответ: $9\sqrt{3}$.

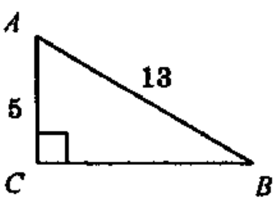


Рис. 7.71

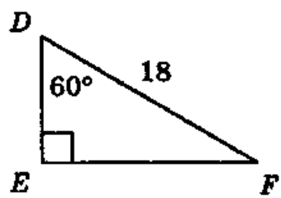


Рис. 7.72

3. Найдите сторону AB треугольника ABC, если высота CH равна $3\sqrt{3}$, $AC = 6\sqrt{3}$, $\angle CBH = 30°$.

Ответ: 18.

IV. Домашнее задание

Решить задачи № 9, 43.

Указания к задачам

9. У квадрата со стороной 1 м диагональ равна $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ (м). Любой отрезок внутри круга должен быть не больше диаметра круга, но $\sqrt{2}$ больше диаметра, т.к. $\sqrt{2}>\sqrt{1,96}$.

О т в е т: нет.

43. 1) Так как каждое из чисел R_1, R_2 и d меньше суммы двух других, то существует треугольник со сторонами R_1, R_2 и d.

2) Рассмотрим ΔO_1O_2M (рис. 7.73) со сторонами $O_1O_2 = d$, $O_1M = R_1$, $O_2M = R_2$. Тогда точка M лежит на окружности с центром O_1 и радиусом R_1, а также на окружности с центром O_2 и радиусом R_2, т. е. является точкой пересечения окружностей.

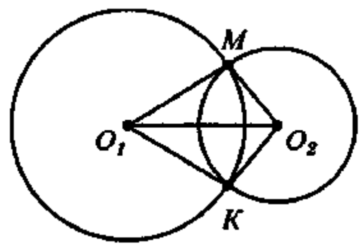


Рис. 7.73

3) Рассмотрим $\Delta O_1O_2K = \Delta O_1O_2M$ такой, что точка K лежит с точкой M в разных полуплоскостях от прямой O_1O_2. Тогда $O_1K = R_1$, $O_2K = R_2$, т. е. точка K тоже является точкой пересечения окружностей.

4) Других общих точек у окружностей нет, т.к. две окружности не могут пересекаться более чем в двух точках.

Дополнительные задачи

1. В равнобокую трапецию вписана окружность (т.е. все стороны трапеции касаются окружности). Найдите радиус окружности, если основания трапеции равны 8 м и 16 м.

О т в е т: $4\sqrt{2}$ м.

2. В треугольнике ABC высота CH равна 8 см. Найдите сторону AB, если $AC = 17$ см, $BC = 10$ см.

О т в е т: 21 см или 9 см.

Урок 36

ТЕМА: Решение задач

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

уметь применять теорему Пифагора и приемы решения прямоугольных треугольников в усложненной ситуации.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Анализ выполнения самостоятельной работы — 10 мин	
3	Решение задач — 23 мин	Задачи № 28, 31, 47
4	Домашнее задание — 2 мин	Задачи № 55, 60

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить решение задач № 9 и № 43. Решения могут быть проверены устно, можно на доске изобразить рисунки.

II. Анализ выполнения самостоятельной работы

Вычислительная часть решения задач самостоятельной работы записывается на доске, обоснования проводятся устно.

III. Решение задач

Решить задачу № 28

Прежде чем приступить к решению задачи, полезно обратить внимание на два момента:

а) вместо неравенства $AM < \frac{AB + AC}{2}$, которое нужно доказать, удобнее будет рассматривать неравенство $2AM < AB + AC$;

б) в ситуации, когда в треугольнике рассматривается медиана, довольно часто помогает прием, связанный с откладыванием на продолжении медианы отрезка, равного этой медиане, а затем с рассмотрением параллелограмма и использованием его свойств.

Решение.

1) Отложим на продолжении медианы AM отрезок $MK = AM$ (рис. 7.74).

2) $ABKC$ — параллелограмм (т.к. $AM = MK$ и $BM = MC$), тогда $AC = BK$.

3) ΔBAK: $AK < AB + AC$ (по неравенству треугольника), но $AK = 2\,AM$, тогда $2AM < AB + AC$ или $AM < \frac{AB + AC}{2}$.

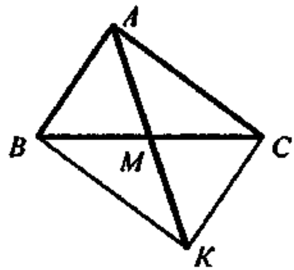


Рис. 7.74

Решить задачу № 31

Решение.

Рассмотрим прямую m (шоссе) и точки A и B (населенные пункты).

1) Пусть отрезок AB пересекает прямую m в точке O (рис. 7.75, *а*), а M — произвольная точка на прямой m, отличная от O. Тогда по неравенству треугольника $AB < AM + MB$, т.е. $AO + OB < AM + MB$, значит, O – искомая точка.

2) Пусть точки A и B лежат по одну сторону от прямой m. Построим точку A_1: $AA \perp m$ и $AC = A_1C$ (рис. 7.75 б). $\Delta AOC = \Delta A_1OC$ по двум сторонам и углу между ними, тогда $AO = A_1O$. Пусть отрезок A_1B пересекает прямую m в точке O, по доказанному в п.1 эта точка — искомая.

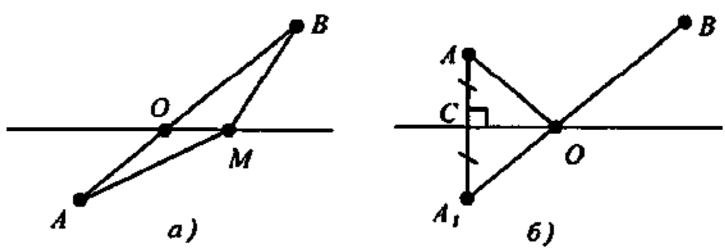


Рис. 7.75

Решить задачу № 47

Решение задачи приведено в учебнике. Однако для лучшего понимания решения целесообразно для каждого равенства указывать, какой треугольник рассматривается.

Решение (рис. 7.76).

1) ΔABC: $AC = AB\cos\alpha = c\cos\alpha$; $BC = AB\sin\alpha = c\sin\alpha$;

2) ΔBCD: $BD = BC\sin\alpha = c\sin^2\alpha$;

3) ΔACD: $AD = AC\cos\alpha = c\cos^2\alpha$; $CD = AC\sin\alpha = c\sin\alpha\cos\alpha$.

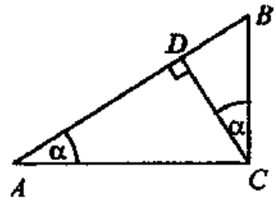


Рис. 7.76

После решения задачи можно познакомить учащихся со следствиями из полученного решения:

$AC^2 = AB\cdot AD$, $BC^2 = AB\cdot BD$, $CD^2 = AD\cdot BD$.

Решить задачу

В ромбе со стороной 20 м проведена высота, равная 16 м. Найдите диагонали и углы ромба.

Решение (рис. 7.77).

1) ΔABH: $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{400-256} = \sqrt{144} = 12$ (м);

2) $DH = AD - AH = 20 - 12 = 8$ (м).

3) ΔDBH: $BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = \sqrt{64+256} = \sqrt{320} = \sqrt{64\cdot 5} = 8\sqrt{5}$ (м).

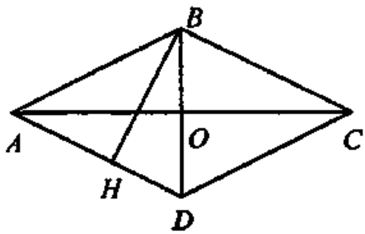


Рис. 7.77

4) По свойству диагоналей ромба $AO \perp BO$, $AO = AC:2$, $BO = BD : 2 = 4\sqrt{5}$ м, тогда $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{400-80} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$, $AC = 16\sqrt{5}$ (м).

5) ΔABH: $\sin A = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$, откуда $\angle A = \angle C \approx 53°8'$.

Тогда $\angle B = \angle D = 180° - \angle A \approx 126°52'$.

Ответ: $8\sqrt{5}$ м, $16\sqrt{5}$ м, $53°8'$, $126°52'$.

IV. Домашнее задание

Решить задачи № 55, 60.

Указания к задачам

55. ΔABD (рис. 7.78): $\operatorname{tg} B = \frac{AD}{AB} = \frac{26}{12{,}4} \approx 2{,}097$, тогда $\angle ABD \approx 64°30'$.

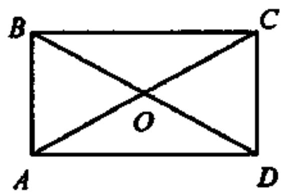


Рис. 7.78

Т.к. $AO = BO$, то $\angle ABO = \angle BAO$, $\angle AOB \approx \approx 180° - 2 \cdot 64°30' = 51°$.

60. *1-й способ.* Пусть катеты равны x. По теореме Пифагора $a^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$, тогда $x^2 = \frac{a^2}{2}$, $x = \frac{a}{\sqrt{2}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2-й способ. Т.к. в равнобедренном прямоугольном треугольнике острые углы равны 45°, то $\sin 45° = \frac{x}{a}$, откуда $x = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Дополнительные задачи

1. Диагональ ромба равна его стороне и равна 10 см. Вычислите вторую диагональ и углы ромба.

О т в е т: $10\sqrt{3}$, 60°, 120°.

2. В прямоугольном треугольнике с острым углом 60° и прилежащим к нему катетом, равным 10 см, вычислите высоту, опущенную из вершины прямого угла.

О т в е т: $5\sqrt{3}$.

Урок 37

ТЕМА: Контрольная работа № 4

Вариант 1

1*. Найдите неизвестные стороны и углы прямоугольного треугольника по следующим данным: гипотенуза $c = 20$ см, $\beta = 24°$.

О т в е т: ≈ 8 см, ≈ 18 см, 66°.

2*. Сторона ромба равна 17 см, а одна из его диагоналей равна 30 см. Найдите вторую диагональ.

О т в е т: 16 см.

3. В треугольнике ABC угол C равен 30°, а высота BD делит сторону AC на отрезки $AD = 12$ см и $DC = 5\sqrt{3}$ см. Найдите сторону AB.

О т в е т: 13 см.

Вариант 2

1*. Найдите неизвестные стороны и углы прямоугольного треугольника, если известны гипотенуза и один из углов: $a = 30$ см, $\angle A = 36°$.

О т в е т: ≈ 18 см, ≈ 24 см, 54°.

2*. Диагонали ромба равны 10 см и 24 см. Чему равна сторона ромба?

О т в е т: 13 см.

3. В треугольнике ABC высота AD делит сторону BC на отрезки $BD = 2\sqrt{3}$ см и $DC = 8$ см, $\angle ABC = 60°$. Найдите сторону AC.

О т в е т: 10 см.

§ 8. Декартовы координаты на плоскости

Задание системы координат позволяет определить положение точки на плоскости парой чисел (координатами), что в свою очередь позволяет определить положение фигур (прямых, окружностей) соответствующими уравнениями, которым удовлетворяют координаты точек этих фигур.

Метод координат, знакомство с которым происходит в данном параграфе, позволяет многие геометрические задачи перевести на язык алгебраических формул и уравнений.

Важным этапом применения этого метода является выбор осей координат. В каждом конкретном случае оси координат целесообразно располагать относительно рассматриваемых фигур так, чтобы соответствующие уравнения были как можно более простыми.

Метод координат, играющий важную роль в решении многих практических задач, в рамках учебника А.В. Погорелова применяется при изучении таких тем, как «Движение», «Векторы», «Декартовы координаты и векторы в пространстве».

Материал этого параграфа тесно связан с курсом алгебры: при его изучении используются тождественные преобразования, решение линейных и квадратных уравнений и их систем.

Задачный материал параграфа разнообразен по содержанию. Наряду с задачами, направленными на непосредственное закрепление введенных понятий, формул, уравнений, имеются задачи, характеризующиеся тесной связью с изученным ранее геометрическим материалом.

Основная цель изучения темы — ввести в арсенал знаний учащихся сведения о координатах, необходимые для применения координатного метода исследования геометрических объектов.

В результате изучения материала параграфа учащиеся должны:

знать формулы для вычисления координат середины отрезка и расстояния между двумя точками координатной плоскости, уравнения окружности и прямой, определения синуса, косинуса, тангенса для любого угла от 0° до 180°;

уметь строить точки по координатам, вычислять координаты середины отрезка и длину отрезка, составлять уравнение окружности и находить по уравнению окружности ее центр и радиус, составлять уравнение прямой по данным условиям, использовать при решении задач условие принадлежности данной точки прямой или окружности, заданным уравнениями, вычислять координаты точки пересечения двух прямых, окружностей или прямой и окружности, находить значения синуса, косинуса, тангенса любых углов, используя определения.

Урок 39

ТЕМА: **Определение декартовых координат. Координаты середины отрезка**

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Вопросы, связанные с введением на плоскости системы декартовых координат, в основном знакомы учащимся. Поэтому представляется целесообразным основное внимание уделить решению задач, при этом теоретические факты, рассматриваемые в пункте, формулировать как итоги выполнения соответствующих упражнений. Ниже предлагается один из возможных вариантов организации такой работы.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать формулы для вычисления координат середины отрезка;

уметь строить точки по координатам, определять знаки координат в зависимости от того, в какой четверти лежит точка; выводить формулы координат середины отрезка и применять их в решении задач.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Анализ контрольной работы — 8 мин	
2	Изучение нового материала — 12 мин	Определения понятий, связанных с системой декартовых координат на плоскости. Формулы координат середины отрезка. Задачи 1, 2
3	Решение задач — 18 мин	Задачи № № 9 (устно), 10 (устно), 3 (устно), 5 (устно), 11 (устно), 12 (1), 13 (1), 14
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 1–4. Задачи № 4, 6, 15, 16

ХОД УРОКА

I. Анализ контрольной работы

Задачи контрольной работы, которые вызвали затруднения у учащихся, необходимо решить, отметив наиболее часто встречавшиеся ошибки в решении.

II. Изучение нового материала

1. Необходимо напомнить учащимся понятия осей координат, начала координат, положительных и отрицательных полуосей. Одновременно выполняется рисунок на доске и в тетрадях, выбирается единица измерения длины (рис. 8.1). Затем выполняется упражнение 2.

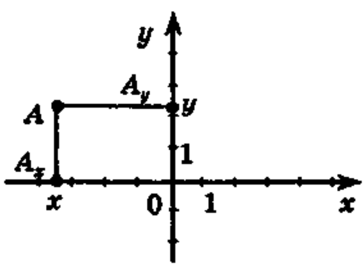


Рис. 8.1

Решить задачу № 2.

Выбираем точки A, B, C и D. При выборе этих точек лучше брать их в разных четвертях.

В процессе выполнения упражнения учащиеся записывают в тетради координаты выбранных точек при этом даются пояснения, что такое абсцисса и ордината точки.

Например, определим координаты точки A: $x = -3{,}5$, $y = 2{,}3$.

Модуль числа x показывает, что точка A_x находится на расстоянии 3,5 ед. от начала координат, а знак числа x показывает, что точка A_x находится на отрицательной полуоси. Число x называется абсциссой точки A.

Модуль числа y показывает, что точка A_y находится на расстоянии 2,3 ед. от начала координат, а знак числа y показывает, что точка A_y находится на положительной полуоси. Число y называется ординатой точки A.

Аналогичные рассуждения проводим для точек B, C и D.

2. Обсуждается вопрос о координатах точек, лежащих на осях. С этой целью учащимся предлагается записать координаты точек A_x, A_y, B_x, B_y, C_x, C_y, D_x и D_y, а также точки O — начала координат.

3. Упражнение 1 представляет собой обратную задачу: построение точки по данным координатам.

Решить задачу № 1.

В ходе построения точек внимание учащихся следует обратить на то, в какой четверти лежит каждая из них:

— у первой точки абсцисса и ордината положительны, она лежит в I четверти,

— у второй — абсцисса отрицательна, ордината положительна, она лежит во II четверти и т. д.

После выполнения упражнения рассматривается вопрос 2 из контрольных вопросов:

Какие знаки у координат точки, если она принадлежит первой (второй, третьей, четвертой) четверти?

По результатам выполнения задач 1 и 2 делаем вывод:

Оси координат разбивают плоскость на четыре части — четверти I, II, III, IV (рис. 8.2). В пределах одной четверти знаки каждой из координат сохраняются.

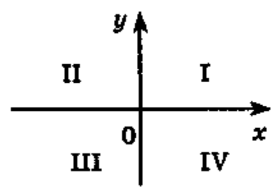


Рис. 8.2

4. При выводе формул координат середины отрезка и расстояния между точками (п. 73) используется формула расстояния между двумя точками координатной оси:

если точки оси абсцисс имеют координаты x_1 и x_2, то расстояние между ними равно $|x_2 - x_1|$;

если точки оси ординат имеют координаты y_1 и y_2, то расстояние между ними равно $|y_2 - y_1|$.

Можно сослаться на то, что эта формула известна из курса алгебры. Однако ее полного и строгого доказательства в курсе алгебры не проводилось, поэтому если позволяет время и уровень подготовки класса, можно вывести эту формулу в процессе решения дополнительной задачи 4. (Аналогичную задачу можно сформулировать и для расстояния между точками оси y.)

5. Вывод формул координат середины отрезка, приведенный в учебном пособии, прост и не требует особых комментариев. Отметим только, что можно несколько подробнее разъяснить учащимся моменты, связанные равенством модулей $|x - x_1| = |x - x_2|$.

Доказательство.

1. Пусть $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $AB \nparallel Oy$, $C(x; y)$ — середина AB.

1) $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ (рис. 8.3). По теореме Фалеса C_1 — середина A_1B_1.

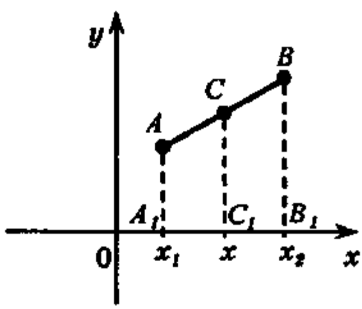


Рис. 8.3

2) Т.к. $A_1C_1 = C_1B_1$, то $|x - x_1| = |x - x_2|$. Числа с одинаковыми модулями или равны, или противоположны, тогда либо $x - x_1 = x - x_2$, либо $x - x_1 = -(x - x_2)$.

3) Если $x - x_1 = x - x_2$, то $x_1 = x_2$, что невозможно, т.к. $AB \nparallel Oy$, если $x - x_1 = -x + x_2$, то $2x = x_1 + x_2$, т. е. $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

2. Если $AB \parallel Oy$ (рис. 8.4), то $x_1 = x_2 = x$, значит, и в этом случае $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

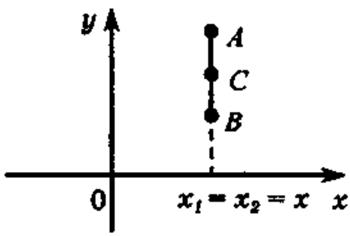


Рис. 8.4

3. В результате аналогичных рассуждений получаем, что ордината середины отрезка вычисляется по формуле $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Примечание. В ходе доказательства можно обойтись без модулей, если рассмотреть случаи, когда $x_2 > x_1$ и когда $x_1 > x_2$. Тогда из того, что C_1 — середина отрезка AB, в первом случае следует равенство $x_2 - x = x - x_1$, а во втором случае — равенство $x_1 - x = x - x_2$. Из обоих равенств следует формула для вычисления абсциссы середины отрезка.

III. Решение задач

Решить задачу № 9 (устно)

Замечания. 1. Решение приведено в тексте учебника. Задача в основном направлена на закрепление знаний учащихся о знаках координат точек, лежащих в полуплоскостях, на которые оси координат разбивают координатную плоскость. В этом смысле промежуточные результаты проводимых рассуждений (то, что точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно оси y и в одной полуплоскости относительно x) более важны, чем окончательные (отрезок AB пересекает ось y и не пересекает ось x).

2. Если точки A и B построить в координатной плоскости, то на рисунке будет видно, пересекает ли отрезок AB ту или иную ось. Учащимся может быть непонятно, что именно надо доказывать. Поэтому следует предложить им решить задачу, не выполняя построения точек A и B.

Р е ш е н и е.

1) У точки A абсцисса отрицательная, а у точки B — положительная. Значит, эти точки лежат по разные стороны от оси Oy, т.е. отрезок AB пересекает ось ординат.

2) У точки A ордината отрицательная, а у точки B — положительная. Значит, эти точки лежат по одну сторону от оси Ox, т.е. отрезок AB не пересекает ось абсцисс.

Решить задачу № 10 (устно)

Р е ш е н и е.

Точки A и B имеют положительные ординаты, а так как отрезок AB не пересекает ось x, то все точки отрезка лежат выше оси y. Значит, отрезок AB пересекает положительную полуось y.

Решить задачу № 3 (устно)

Р е ш е н и е.

Так как ордината первой точки (A) равна 2, то эта точка отстоит от оси x на две единицы. Тогда проходящая через нее прямая, параллельная оси x, тоже отстоит оси x на две единицы. А это означает, что все точки, лежащие на этой прямой, в том числе и вторая данная точка (B), отстоят от оси x на две единицы, т.е. ее ордината равна 2.

Решить задачу № 5 (устно)

О т в е т: (2; 0).

Решить задачу № 11 (устно)

Р е ш е н и е.

Проведем $AB \perp Ox$ и $AC \perp Oy$. $ABOC$ — прямоугольник (рис. 8.5), поэтому 1) $AC = OB = 3$; 2) $AB = OC = 4$.

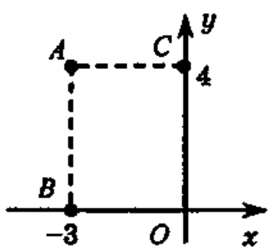


Рис. 8.5

Решить задачу № 12 (1)

Решение.

Пусть $C(x; y)$ — середина AB. Тогда $x = \frac{1+5}{2} = 3$, $y = \frac{-2+6}{2} = 2$.

Ответ: (3; 2).

Решить задачу № 13 (1)

Решение.

Пусть B имеет координаты $(a;\ b)$. Тогда $-1 = \frac{0+a}{2}$, откуда $a = -2$, $2 = \frac{1+b}{2}$, откуда $b = 4 - 1 = 3$.

Ответ: (−2; 3).

Решить задачу № 14

Чтобы наметить ход решения задачи, изображаем четырехугольник $ABCD$ (рис. 8.6) и выбираем подходящий признак параллелограмма, на основании которого переформулируем задачу. Поскольку доказать параллельность или равенство отрезков пока не можем, выбираем признак параллелограмма, связанный с точкой пересечения диагоналей. Таким образом, нужно доказать, что отрезки AC и BD пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, т.е. что середины этих отрезков совпадают. Строить точки A, B, C и D в координатной плоскости необязательно.

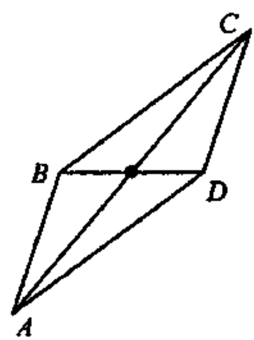


Рис. 8.6

Решение.

1) Пусть $M(x; y)$ — середина AC. Тогда $x = \frac{-1+1}{2} = 0$, $y = \frac{-2-2}{2} = -2$, $M(0; -2)$.

2) Пусть $N(x; y)$ — середина BD. Тогда $x = \frac{2-2}{2} = 0$, $y = \frac{-5+1}{2} = -2$, $N(0; -2)$.

3) Диагонали AC и BD пересекаются в точке (0; −2) и делятся этой точкой пополам, значит, $ABCD$ — параллелограмм.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 1–4. Решить задачи № 4, 6, 15, 16.

Указания к задачам

4. О т в е т: 3.

6. О т в е т: (0; 3).

7. Точки, у которых абсциссы равны 3, лежат на прямой a, параллельной оси y и проходящей через точку (3, 0). (рис. 8.7). Чтобы доказать, что прямая a является искомым геометрическим местом точек, нужно доказать, что

1) любая точка, лежащая на прямой a, имеет абсциссу, равную 3;

2) любая точка с абсциссой 3 лежит на прямой a.

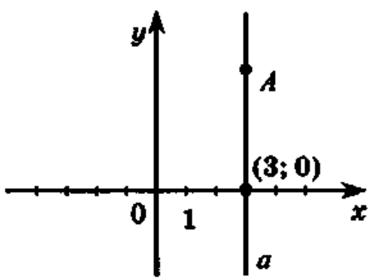


Рис. 8.7

Пусть $A \in a$. Т.к. $a \parallel Oy$, то абсциссой точки A является число 3.

Пусть точка B имеет абсциссу 3. Это значит, что прямая, параллельная оси Oy, пересечет ось Ox в точке (3; 0). Т.к. через любую точку может проходить только одна прямая, параллельная данной (в нашем случае оси y), то точка B лежит на прямой a.

Таким образом, мы доказали оба утверждения, значит, прямая a является искомым геометрическим местом точек.

8. По определению модуля числа: $|x| = x$, если $x \geq 0$ и $|x| = -x$, если $x < 0$. Таким образом, $|x| = 3$ означает, что x равен 3 или −3. В задаче 7 было доказано, что геометрическим местом точек, абсциссы которых равны 3, является прямая a, параллельная оси y и пересекающая ось x в точке (3, 0). Аналогично, геометрическим местом точек, у которых абсциссы равны −3, является прямая b, параллельная оси y и пересекающая ось x в точке (− 3; 0). Отсюда

следует, что искомым геометрическим местом точек является пара этих прямых (рис. 8.8). Действительно:

1) Пусть точка A лежит на прямой a или на прямой b. Если она лежит на прямой a, то ее абсцисса равна 3, а если на прямой b, то ее абсцисса равна -3. И в том, и в другом случае $|x| = 3$.

2) Пусть точка B имеет абсциссу, модуль которой равен 3, то есть 3 или -3. Если абсцисса равна 3, то точка B лежит на прямой a, а если абсцисса равна -3, то точка B лежит на прямой b.

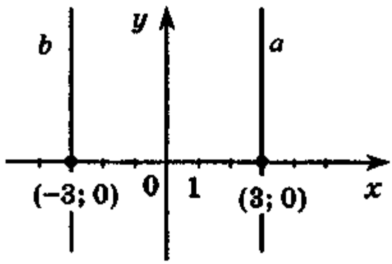


Рис. 8.8

Таким образом, доказано, что искомым геометрическим местом точек является пара прямых, параллельных оси y, одна из которых пересекает ось x в точке (3; 0), другая — в точке (– 3; 0).

15. Используя свойство диагоналей параллелограмма, сначала находим координаты точки M — середины диагонали AC, а затем координаты $(x; y)$ точки D при условии, что точка M является серединой диагонали BD. 1) M (2; 1); 2) $2 = \frac{2+x}{2}$, $x = 2$; $1 = \frac{3+y}{2}$, $y = -1$; $D\,(2; -1)$.

16. О т в е т: (0; 1), (–2; 1), (–2; 0).

Дополнительные задачи

1. Из точек $A(-2;\,-4)$ и $B\,(5;\,-4)$ опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ось x. Определите вид четырехугольника AA_1B_1B.

О т в е т: прямоугольник.

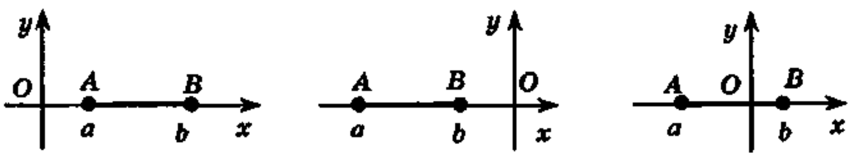
2. Определите координаты точек пересечения с осями координат окружности с центром в начале координат и радиусом 5.

О т в е т : (5; 0), (–5; 0), (0; 5) и (0; –5).

3. Отметьте точки A (0; 2), B (5; 0), C (0; −2) и D (− 5; 0). Докажите, что $ABCD$ — ромб.

4. Докажите, что расстояние между двумя точками (x_1; 0) и (x_2; 0) оси x при любых x_1 и x_2 определяется по формуле $d = |x_2 - x_1|$.

Указания. По определению модуля число $|x_2 - x_1|$ равно $x_2 - x_1$, если $x_2 \geq x_1$, или $x_1 - x_2$, если $x_1 > x_2$. Другими словами, нам надо доказать, что расстояние d равно разности между большей координатой (координатой правой точки) и меньшей координатой (координатой левой точки). Обозначим через a меньшую из координат x_1 и x_2, а через b — большую из них и докажем, что $d = b - a$. Доказательство этого факта требует рассмотрения всех возможных случаев взаимного расположения начала координат относительно точек A и B. Эти случаи и вычисление длины отрезка AB в каждом из этих случаев изображены на рис. 8.9.



$OA = a$, $OB = b$
$AB = OB - OA$
$AB = b - a$

$OA = -a$, $OB = -b$
$AB = OA - OB$
$AB = -a - (-b) = b - a$

$OA = -a$, $OB = b$
$AB = OB + OA$
$AB = b - a$

Рис. 8.9

5. Проверьте, является ли точка M(4; 2) серединой отрезка AB, если: а) A (3; −1), B (5; 5); б) A (3; 6), B (−5; −2).

Ответ: а) да, б) нет.

6. В треугольнике OAB проведена медиана OC. Определите координаты точки C, если точки A и B имеют координаты: а) A (−5; 0), B (0; −3); б) A (0; −4), B (5; −2); в) A (−1; 3), B (5; 4).

Ответ: а) (−2,5; −1,5); б) (2,5; −3); в) (2; 3,5).

7. AB — диаметр окружности, C — ее центр. Найдите координаты точки A, если C (0; 3), B (3; 0).

Ответ: (−3; 6)

Урок 40

ТЕМА: Расстояние между точками

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Формула расстояния между точками находит широкое применение в изучении курса геометрии. В данном параграфе она применяется для вывода уравнений окружности и прямой, в дальнейшем она используется при изучении тем «Движение» и «Векторы». Поэтому на ее закрепление нужно обратить особое внимание. Упражнения на непосредственное применение этой формулы полезно предлагать учащимся не только во время изучения данного пункта, но и на последующих уроках (при опросе, в качестве дополнительных упражнений, а также при подготовке к контрольной работе), для того чтобы обеспечить прочное усвоение формулы.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать формулу расстояния между двумя точками координатной плоскости;

уметь выводить формулу и применять ее для вычисления расстояния между точками с заданными координатами.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 8 мин	Формула расстояния между точками
3	Решение задач — 17 мин	Задачи № 19, 21, дидактические задачи на закрепление изученного материала
4	Обучающая самостоятельная работа — 8 мин	
5	Домашнее задание — 2 мин	Контрольный вопрос 5. Задачи № 17, 18, 22

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 1–4, решение задач № 4, 6 и 16 устно, № 15 с записью решения на доске.

II. Изучение нового материала

1. При выводе формулы расстояния между точками используется теорема Пифагора. Объяснение можно начать с решения задачи, где этот шаг очевиден, так как нужно найти длину отрезка, концы которого расположены на осях координат:

Решить задачу

Даны точки A (– 8; 0) и B (0; 6). Найдите расстояние AB.

Изобразив данные точки в координатной плоскости (рис. 8.10), учащиеся должны заметить, что отрезок AB — это гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого известны катеты. Таким образом, расстояние AB можно вычислить по теореме Пифагора:

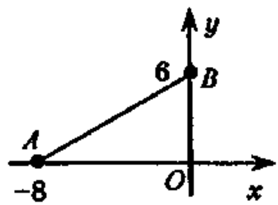


Рис. 8.10

Р е ш е н и е. $AO = 8$, $BO = 6$, $AB = \sqrt{64+36} = 10$.

Решить задачу

Найдите длину отрезка MP, если даны точки M (2; 2) и P (5; 6).

Изобразив данные точки в координатной плоскости и опустив из построенных точек перпендикуляры на оси координат (рис. 8.11), выделим прямоугольный треугольник MPH, в котором искомый отрезок MP является гипотенузой.

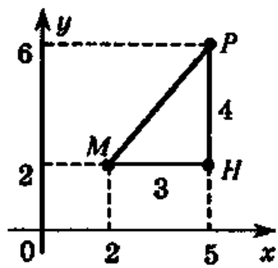


Рис. 8.11

Р е ш е н и е. $MH = 5 - 2 = 3$, $PH = 6 - 2 = 4$, $MP = \sqrt{9+16} = 5$.

Необходимо обратить внимание учащихся на то, как вычисляются катеты треугольника MPH по данным координатам

вершин M и P: поскольку это отрезки, параллельные осям, их длины равны длинам соответствующих отрезков на осях, а они, в свою очередь, вычисляются по формулам $d_1 = |x_2 - x_1|$, $d_2 = |y_2 - y_1|$.

2. Вывод формулы в общем виде

Пусть $A_1(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Найдем расстояние $A_1A_2 = d$.

1) Если $A_1A_2 \nparallel Ox$ и $A_1A_2 \nparallel Oy$, рассмотрим ΔA_1A_2A (рис. 8.12):

$AA_1 = |x_2 - x_1|$ и $AA_2 = |y_2 - y_1|$.

По теореме Пифагора $A_1A_2^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$.

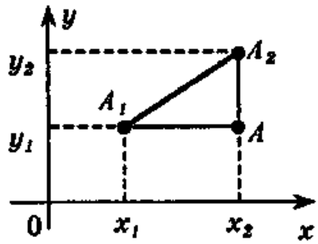


Рис. 8.12

Т.к. квадрат числа равен квадрату его модуля, то $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

2) Если $A_1A_2 \parallel Ox$, то $A_1A_2 = |x_2 - x_1|$ (рис. 8.13).

Т.к. $y_1 = y_2$, то $|y_2 - y_1| = 0$, значит, для этого случая верна и общая формула: $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

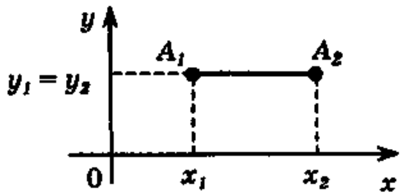


Рис. 8.13

3) Если $A_1A_2 \parallel Oy$, то $A_1A_2 = |y_2 - y_1|$ (рис. 8.14).

Т.к. $x_1 = x_2$, то $|x_2 - x_1| = 0$, значит, и для этого случая верна общая формула: $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

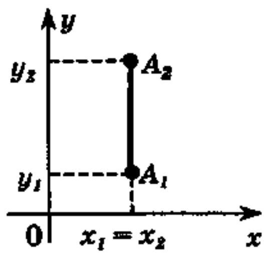


Рис. 8.14

Решить задачу № 14(1)

Р е ш е н и е. Нужно построить прямоугольный треугольник с катетами, равными a и b. Искомый отрезок — гипотенуза этого треугольника.

Решить задачу № 12

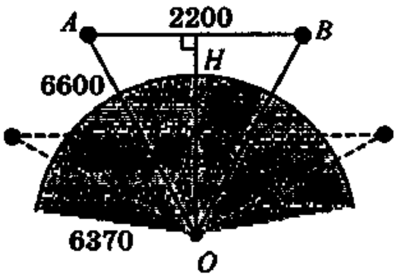


Рис. 7.35

Прежде чем приступить к решению задачи, нужно вникнуть в условие и вопрос задачи. Космонавты находятся на расстоянии 6600 км (6370 км + 230 км) от центра Земли. Для того, чтобы они могли увидеть друг друга, то есть чтобы земной шар не мешал им видеть друг друга, соединяющий их отрезок длиной 2200 км должен не пересекать окружность радиуса 6370 км (рис. 7.35), т.е высота равнобедренного треугольника с основанием 2200 км и боковой стороной 6600 км должна быть больше, чем 6370 км.

Р е ш е н и е.

1) ΔOAH — прямоугольный, по теореме Пифагора $OH^2 = 6600^2 - 1100^2 = 5500 \cdot 7700 = 35 \cdot 11^2 \cdot 100^2$, $OH = 1100\sqrt{35}$ км.

2) $1100\sqrt{35} > 6370$, значит, космонавты могут видеть друг друга.

Замечание. Вычисления можно выполнять с помощью калькулятора или сделав прикидку: $1100\sqrt{35} > 1100 \cdot 5{,}9 = 5900 + 590 = 6490 > 6370$).

IV. Домашнее задание

Решить задачи № 14(2), 16.

Указания к задачам

14(2). Чтобы построить отрезок $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, если $a > b$, нужно построить прямоугольный треугольник с гипотенузой a и катетом b. Искомый отрезок — второй катет этого треугольника.

Построения.

1) Провести две перпендикулярные прямые. Обозначить точку их пересечения A.

2) Отложить на одной из прямых отрезок $AB = b$.

3) Провести окружность с центром в точке B радиусом a до пересечения в точке C с другой прямой.

4) По теореме Пифагора AC — искомый отрезок.

16. Пусть BC — желоб, о котором говорится в задаче (рис. 7.36). Проведем $BH \perp D$, тогда ΔBCH — прямоугольный, $BH = 10$ м, $CH = 8$ м $-$ 4 м $=$ 4 м, $BC = \sqrt{100+16} = \sqrt{116} = \sqrt{4 \cdot 29} =$
$= 2\sqrt{29} \approx 10{,}8$ (м).

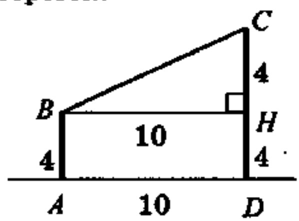


Рис. 7.36

Дополнительные задачи

1. Стороны прямоугольника равны 9 см и 40 см. Найдите диаметр описанной около него окружности.

О т в е т: 41 см.

2. Диагональ параллелограмма перпендикулярна его стороне. Найдите длину этой диагонали, если стороны параллелограмма равны 17 см и 15 см.

О т в е т: 8 см.

Урок 27

ТЕМА: Контрольная работа № 3

1-й вариант

1*. Стороны прямоугольника 5 см и 12 см. Чему равна диагональ?

О т в е т: 13 см.

2*. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 29 см, а высота 21 см. Чему равно основание треугольника?

О т в е т: 40 см.

3. Две стороны треугольника равны 7 см и 10 см. Какую длину может иметь третья сторона? Выберите один из указанных ответов:

1) 2 см, 2) 3 см 3) 16 см 4) 18 см.

О т в е т: 3.

4. Из точки B к прямой a проведены две наклонные: $BA = 20$ см и $BC = 15$ см. Проекция наклонной BA равна 16 см. Найдите проекцию наклонной BC.

Ответ: 9 см.

2-й вариант

1*. Одна из сторон прямоугольника равна 8 см, а диагональ 17 см. Чему равна вторая сторона прямоугольника?

Ответ: 15 см.

2*. Высота равнобедренного треугольника равна 5 см, а основание 24 см. Найдите боковую сторону.

Ответ: 13 см.

3. Две стороны треугольника равны 6 см и 11 см. Какую длину может иметь третья сторона? Выберите один из указанных ответов:

1) 19 см, 2) 14 см, 3) 5 см, 4) 3 см.

Ответ: 2.

4. Из точки A к прямой b проведены две наклонные AB и AC. Проекция наклонной AC равна 16 см, проекция наклонной AB равна 5 см. Чему равна наклонная AC, если $AB = 13$ см?

Ответ: 20 см.

Домашнее задание

Повторить контрольный вопрос 1.

Урок 28

ТЕМА: Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Определения синуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника дополняют введенное ранее определение косинуса острого угла. В учебнике сформулированы правила, позволяющие по стороне и острому углу прямоугольного треугольника находить другие стороны. Эти правила полезно предложить учащимся вывести, пользуясь определениями синуса, косинуса и тангенса острого угла. При решении конкретных задач учащиеся могут пользоваться как полученными правилами, так и непосредственно определениями. Однако основное внимание следует уделить прочному усвоению учащимися определений синуса, косинуса и тангенса острого угла. Уверенное владение определениями позволит учащимся не только легко восстановить в памяти указанные в учебнике правила, но и получить другие следствия (например, вычислить гипотенузу по катету и острому углу, см. задачу 44 и решать другие задачи). Запоминания приведенных в учебнике правил можно от учащихся не требовать.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определения синуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника,

уметь применять определения синуса, косинуса и тангенса острого угла для вычисления одного неизвестного элемента прямоугольного треугольника.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Анализ контрольной работы — 5 мин	
2	Проверка домашнего задания — 2 мин	
3	Изучение нового материала — 13 мин	Определения синуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника. Задача № 45
4	Решение задач — 18 мин	Дидактические задачи на применение определений синуса, косинуса и тангенса острого угла
5	Домашнее задание — 2 мин	Контрольный вопрос 9 (только определение). Задачи № 44, 46

ХОД УРОКА

I. Анализ выполнения контрольной работы

Задачи контрольной работы, которые вызвали затруднения у учащихся, необходимо решить, отметив наиболее часто встречавшиеся ошибки в решении.

II. Проверка домашнего задания

Проверить вопрос 1 с выполнением рисунка на доске.

III. Изучение нового материала

1. Определения синуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника вводятся по аналогии с определением косинуса острого угла. При этом лучше, как и в определении косинуса, сначала дать определения без буквенных обозначений, например, в такой форме:

«Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе».

«Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету».

Так же как и в случае введения определения косинуса, следует обратить внимание учащихся на слова «прилежащий» и «противолежащий». Они означают, что речь идет о катете, который прилежит к рассматриваемому углу, или о катете, который противолежит этому углу.

Проверить правильность усвоения введенных определений можно с помощью следующих заданий:

Задание 1. Дан прямоугольный треугольник ABC (рис. 7.37).

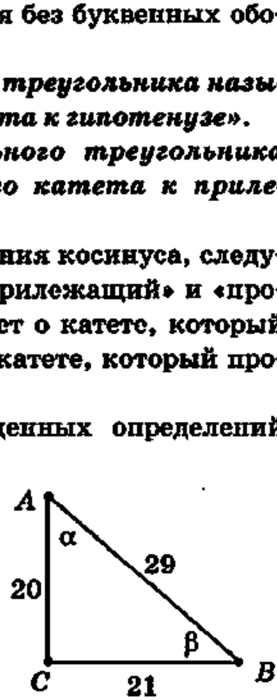


Рис. 7.37

а) *Чему равен* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$?

О т в е т: $\sin\alpha = \frac{21}{29}$, $\cos\alpha = \frac{20}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{21}{20}$;

б) *Чему равен* $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$?

О т в е т: $\sin\beta = \frac{20}{29}$, $\cos\beta = \frac{21}{29}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{20}{21}$.

После выполнения этого задания можно заметить, что $\sin\alpha = \cos\beta$, $\cos\alpha = \sin\beta$, а $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ — взаимнообратные числа.

Задание 2. Катеты треугольника равны 3 см и 4 см. Найдите синусы его острых углов.

О т в е т: Т.к. данный треугольник (рис. 7.38) — египетский, то его гипотенуза равна 5. Тогда $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$, $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$.

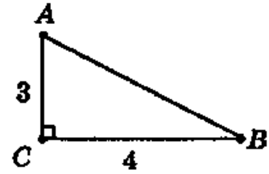


Рис. 7.38

2. Сформулированные в учебном пособии правила, позволяющие по стороне и острому углу прямоугольного треугольника находить другие стороны, полезно предложить учащимся вывести в ходе решения задач, используя определения синуса, косинуса и тангенса острого угла.

Решить задачу № 45

В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна а, а один из острых углов α. Найдите другой острый угол и катеты.

Р е ш е н и е.

1) $\angle B = 90° - \alpha$.

2) $\sin\alpha = \frac{AB}{BC}$, тогда $AB = BC\sin\alpha = a\sin\alpha$; $\cos\alpha = \frac{AC}{BC}$, тогда $AC = BC\cos\alpha = a\cos\alpha$.

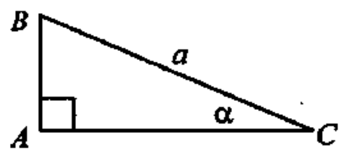


Рис. 7.39

После решения задачи можно сформулировать первые два правила, приведенные в учебнике:

Катет, противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы на sin α.

Катет, прилежащий к углу α, равен произведению гипотенузы на cos α.

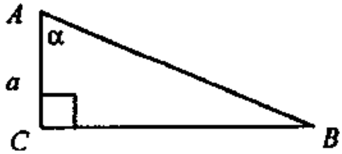


Рис. 7.40

Для того чтобы вывести третье правило, учащимся предлагается следующее задание:

Задание 3. В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен α. Найдите катет, противолежащий этому углу, если другой катет равен а.

Решение.

Т.к. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$, то $BC = AC\operatorname{tg}\alpha = a\operatorname{tg}\alpha$, т.е.

Катет, противолежащий углу α, равен произведению второго катета на tgα.

Учащимся следует сказать, что при решении задач они могут пользоваться выведенными правилами. Но специально их можно не заучивать, так как знания определений синуса, косинуса и тангенса (вместе с теоремой Пифагора) достаточно, чтобы вычислять неизвестные элементы прямоугольных треугольников, если два элемента известны.

III. Решение задач

Решить задачу

Гипотенуза AB прямоугольного треугольника равна 10 см, а катет BC равен 8 см. Чему равны тангенсы его острых углов?

Решение.

1) В $\triangle ABC$ (рис. 7.41): по теореме Пифагора $AC^2 = 10^2 - 8^2 = 36$, $AC = 6$ см.

2) $\operatorname{tg}A = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$,

$\operatorname{tg}B = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

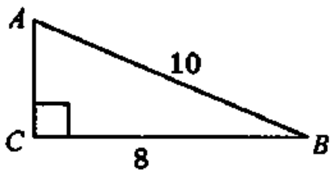


Рис. 7.41

Решить задачу

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB = 5 см, sinA = 0,6. Найдите катет BC.

Решение. $\sin A = \frac{BC}{AB}$, $0{,}6 = \frac{BC}{5}$, $BC = 0{,}6 \cdot 5 = 3$ (см).

Ответ: $BC = 3$ см.

Решить задачу

В прямоугольном треугольнике ABC катет BC = 10 см, $\cos B = \frac{5}{13}$. ***Найдите гипотенузу AB.***

Р е ш е н и е. $\cos B = \frac{BC}{AB}$, $\frac{5}{13} = \frac{10}{AB}$, $AB = 13 \cdot \frac{10}{5} = 26$.

О т в е т: $AB = 26$ см.

Решить задачу

В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, ***катет*** $BC = 10$ ***см,*** $\operatorname{tg} A = 2{,}5$. ***Найдите второй катет и гипотенузу треугольника.***

Р е ш е н и е $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, $AC = \frac{10}{2{,}5} = 4$ (см), $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$ (см).

О т в е т: $AC = 4$ см, $AB = 2\sqrt{29}$ см.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольный вопрос 9 (только определение). Решить задачи № 44, 46.

Указания к задачам

44. Пусть гипотенуза равна c, неизвестный катет равен a. Так как $0{,}8 = \frac{8}{c}$, то $c = 10$ см; по теореме Пифагора $a = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см).

О т в е т: 10 см, 6 см.

46 (рис. 7.42). $\angle B = 90° - \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{AC}$, тогда $AC = \frac{AB}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\sin\alpha = \frac{AB}{BC}$, тогда $BC = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$.

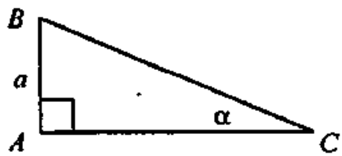


Рис. 7.42

О т в е т: $90° - \alpha$, $\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{a}{\sin\alpha}$.

Дополнительные задачи

1. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза BC в 3 раза больше катета AB. Найдите синус, косинус и тангенс угла C.

Ответ: $\frac{1}{3}$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 26 см, а косинус одного из острых углов равен $\frac{5}{13}$. Найдите катеты треугольника.

Ответ: 10 см и 24 см.

Урок 29

ТЕМА: Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

уметь применять определения синуса, косинуса и тангенса острого угла в решении задач, находить по таблицам или с помощью калькулятора значения синуса, косинуса и тангенса острого угла.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Решение задач — 33 мин	Нахождение значений синусов, косинусов и тангенсов углов по таблицам или с помощью калькулятора. Задачи № 48, 53, 56, 58

№	Этап урока	Содержание работы
3	Домашнее задание — 2 мин	Задачи № № 49(2), 50(2), 54

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить решение задач 44, 46 с выполнением рисунка на доске. При обсуждении решений полезно требовать от учащихся воспроизводить определения синуса, косинуса и тангенса острого угла.

II. Решение задач

Для решения ряда задач, связанных с вычислениями значений тригонометрических функций острых углов прямоугольных треугольников, необходимо уметь пользоваться таблицами или микрокалькуляторами. Одно из этих средств для нахождения синуса, косинуса и тангенса острого угла и для нахождения угла по значению какой-либо из указанных его тригонометрических функций выбирается по усмотрению учителя.

Прежде всего учитель должен обратить внимание учащихся на то, что для измерения углов используются также единицы измерения, называемые минутами и секундами.

Минута — одна шестидесятая доля градуса, секунда — одна шестидесятая доля минуты.

Для обозначения минут используется знак «'», секунды обозначаются знаком «"». Например, угол 36 градусов 28 минут 47 секунд обозначается так: $36° 28' 47''$.

Затем учитель показывает, как по таблицам (Брадиса) или с помощью калькулятора находить значения тригонометрических функций острых углов и обратно: по значению тригонометрической функции находить угол.

Замечание. При работе с таблицами использование поправок основано на свойствах тригонометрических функций, которые рассматриваются в п. 70. Поэтому на данном уроке действия с поправками даются без обоснования.

Решить задачу № 48

Ответ. 1) $\sin 22° \approx 0{,}3746$; $\sin 22°36' \approx 0{,}3843$; $\sin 22°38' \approx \approx 0{,}3848$; $\sin 22°41' \approx 0{,}3856$; $\cos 68° \approx 0{,}3746$; $\cos 68°18' \approx 0{,}3697$; $\cos 68°23' \approx 0{,}3684$; 2) $x = 16°34'$, $x = 16°31'$, $x = 74°17'$.

Решить задачу № 53

Решение.

Случай 1. 1) Если BH — высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника (рис. 7.43, а), то BH — его медиана: $AH = CH = 40{,}6 : 2 = 20{,}3$ (м).

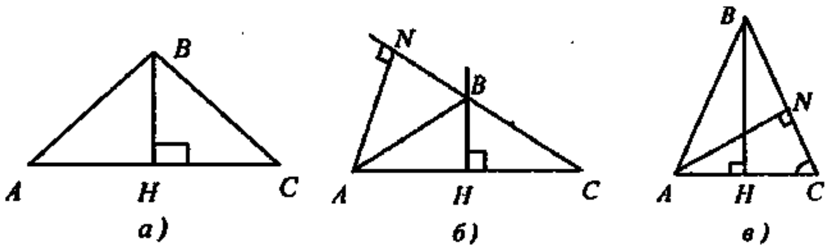


Рис. 7.43

2) ΔABH: по теореме Пифагора $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 20{,}3^2 + 12{,}4^2 = = 412{,}09 + 153{,}76 = 565{,}85$, $AB \approx 23{,}8$ (м).

3) $\operatorname{tg} A = \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{12{,}4}{20{,}3} \approx 0{,}6108$, откуда $\angle A \approx 31°25'$.

4) $\angle C = \angle A$ (углы при основании равнобедренного треугольника), $\angle B = 180° - 2 \cdot \angle A \approx 117°10'$.

Случай 2 (рис. 7.43, б). Если ΔABC – тупоугольный и AN – высота к боковой стороне, то в ΔANC: $\sin C = \dfrac{12{,}4}{40{,}6} \approx 0{,}3054$, $\angle BAC = = \angle BCA \approx 17°47'$. В ΔBCH: $BC = \dfrac{HC}{\cos C} \approx \dfrac{20{,}3}{0{,}9554} \approx 21{,}2$. $\angle ABC = = 180° - 2 \cdot \angle C \approx 144°26'$.

Случай 3 (рис. 7.43, в). В ΔANC $AN > NC$, поскольку $\angle NCA > \angle NAC$, но по неравенству треугольника $NC > 40{,}6 - 12{,}4 = = 28{,}2 > AN$. Получили противоречие; случай *в*) невозможен.

Случай прямоугольного равнобедренного треугольника предложите учащимся разобрать самостоятельно.

Ответ. 23,8 м; 31°25′, 31°25′, 117°10′; 2) 21,2 м; 17°47′, 17°47′, 144°26′.

Решить задачу № 56

Решение.

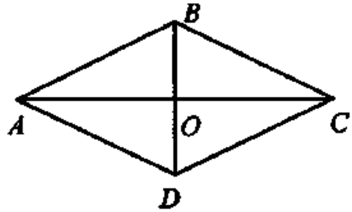


Рис. 7.44

1) По свойству диагоналей ромба $AC \perp BD$, $AO = AC : 2 = 2{,}365$, $BO = BD : 2 = 1{,}47$ (рис. 7.44).

2) $\operatorname{tg} BAO = \frac{BO}{AO} = \frac{1{,}47}{2{,}365} \approx 0{,}6216$,

откуда $\angle BAO \approx 31°52'$, тогда $\angle BAD \approx 63°44'$.

3) По свойству углов параллелограмма $\angle C = \angle A \approx 63°44'$, $\angle B = \angle D = 180° - \angle A \approx 116°16'$.

Ответ: 63°44′, 116°16′.

Решить задачу № 58

Решение.

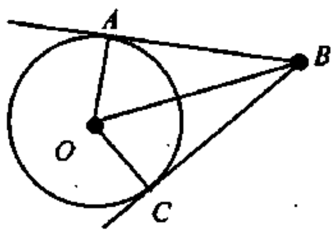


Рис. 7.45

1) ΔABO (рис. 7.45) — прямоугольный (т.к. OA — радиус, проведенный в точку касания). Тогда $AB^2 = OB^2 - OA^2 = 169 - 25 = 144$, $AB = 12$ (м).

2) $\sin \angle ABO = \frac{AO}{OB} = \frac{5}{13} \approx 0{,}3846$,

откуда $\angle ABO \approx 22°37'$.

3) $\angle ABC = 2\angle ABO$ (по свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки), тогда $\angle ABC \approx 45°14'$.

Ответ: 12 м, 45°14′.

III. Домашнее задание

Решить задачи № 49(2), 50(2), 54.

Указания к задачам

49 (2). $\sin 24°36' \approx 0{,}4163$, $\cos 24°36' \approx 0{,}9092$.

50 (2). $x' \approx 30°6'$.

54. Пусть $\frac{AB}{BC} = \frac{19}{28}$, тогда $\operatorname{tg} C = \frac{19}{28} \approx 0{,}6786$, $\angle C \approx 34°10'$, $\angle A \approx 90° - 34°10'$, $\angle A \approx 55°50'$.

Дополнительные задачи

1. В прямоугольном треугольнике катет равен 8 см, а тангенс прилежащего угла равен $\frac{1}{2}$. Найдите второй катет и гипотéнузу треугольника.

О т в е т: 4 см, $4\sqrt{5}$ см.

Урок 30

ТЕМА: Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

На уроке рассматриваются утверждения о том, что синус и тангенс острого угла зависят только от величины угла, и выводится формула $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Первое утверждение, так же как и аналогичное утверждение относительно косинуса острого угла, приводится для того, чтобы соблюсти корректность применения данных определений при решении задач. Однако такие тонкости построения теории курса, как правило, большинству учащихся недоступно. Кроме того, даже в учебнике ссылок на данное утверждение в ходе решения задач не делается. Поэтому, сообщив учащимся смысл формулировки утверждения и показав, как оно обосновывается, можно затем не требовать обязательного усвоения ни формулировки утверждения, ни его доказательства. Доказательство формулы для тангенса также можно лишь показать учащимся и не требовать его усвоения, а саму формулу желательно, чтобы учащиеся запомнили, поскольку в дальнейшем она будет использоваться при выводе основных тригонометрических тождеств и при решении задач.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определения синуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника, формулу $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

уметь применять определения синуса, косинуса и тангенса острого угла для вычисления неизвестных элементов прямоугольного треугольника.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 10 мин	
2	Изучение нового материала — 5 мин	Зависимость синуса и тангенса острого угла только от величины угла. Формула $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
3	Решение задач — 15 мин	Задачи № 59, 61(1б, 2б, 3б, 4б)
4	Самостоятельная работа — 8 мин	
	Домашнее задание — 2 мин	Задачи № 57, 61(1а, 2а, 3а, 4а)

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить решение задач № 49(2), 50(2), 54. При этом полезно еще раз напомнить учащимся, как находить значения синуса, косинуса и тангенса по таблицам или с помощью калькулятора.

II. Изучение нового материала

Сначала напомним учащимся утверждение о косинусе острого угла:

Косинус угла зависит только от градусной меры угла и не зависит от расположения и размеров треугольника.

Оно означает, что в каких бы прямоугольных треугольниках ни рассматривались углы, если их градусные меры равны, то и их косинусы равны. Аналогичное утверждение справедливо и для синуса и тангенса острого угла:

Синус и тангенс угла зависят только от величины угла.

Доказательство излагается учителем с выполнением рисунка (рис. 7.46) и записью выкладок на доске (в тетрадях они не записываются). Целесообразно сделать выкладки, несколько более подробные, чем данные в учебнике:

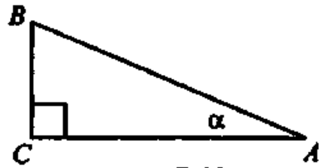


Рис. 7.46

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{AB} = \sqrt{\frac{AB^2 - AC^2}{AB^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{AC}{AB}\right)^2} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Так как $\sin\alpha$ зависит только от $\cos\alpha$, а косинус угла зависит только от величины угла, то и синус угла зависит только от величины угла. Тангенс угла зависит от его синуса и косинуса, значит, тоже зависит только от величины угла.

В ходе доказательства появилась формула $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, которую учащимся следует запомнить.

III. Решение задач

Решить задачу № 59

Прежде чем решать задачу, необходимо выполнить рисунок 7.47 и пояснить учащимся, что «высота солнца над горизонтом» характеризуется углом *ACB*, где *AB* — длина шеста, *BC* — длина его тени.

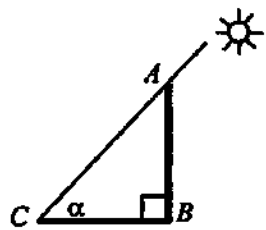


Рис. 7.47

Решение.

ΔABC — прямоугольный, тогда $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$, откуда $\alpha \approx 60°16'$.

Ответ: $60°16'$.

Решить задачу № 61(1б, 2б, 3б, 4б)

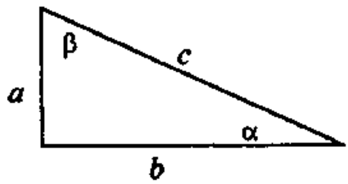


Рис. 7.48

Р е ш е н и е (рис. 7.48).

1 б) $c=\sqrt{9^2+40^2}=\sqrt{1681}=41$;

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{9}{40}=0{,}225$, откуда $\alpha\approx 12°41'$;

$\beta=90°-\alpha\approx 77°19'$.

О т в е т: 41; 12°41′; 77°19′.

2 б) $b=\sqrt{25^2-7^2}=\sqrt{(25-7)(25+7)}=\sqrt{18\cdot 32}=\sqrt{9\cdot 2\cdot 16\cdot 2}=$

$=3\cdot 4\cdot 2=24$; $\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{7}{25}=0{,}28$, откуда $\alpha\approx 16°16'$; $\beta=90°-\alpha\approx$

$\approx 73°44'$.

О т в е т: 24; 16°16′; 73°44′.

3 б) $\sin 50°20'\approx 0{,}7698$, $\cos 50°20'\approx 0{,}6334$,

$\sin\alpha=\frac{a}{c}$, тогда $a\approx 4\cdot 0{,}7698=3{,}0792\approx 3{,}1$;

$\cos\alpha=\frac{b}{c}$, тогда $b\approx 4\cdot 0{,}6334=2{,}5336\approx 2{,}5$;

$\beta=90°-50°20'=39°40'$.

О т в е т: 3,1; 2,5; 39°40′.

4) $\sin 40°48'\approx 0{,}6534$, $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, тогда $c\approx\frac{5}{0{,}6534}\approx 7{,}6523\approx 7{,}7$;

$\operatorname{tg} 40°48'\approx 0{,}8632$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$, тогда $b\approx\frac{5}{0{,}8632}\approx 5{,}7924\approx 5{,}8$;

$\beta=90°-40°48'=49°12'$.

О т в е т: 7,7; 5,8; 49°12′.

Замечание. По правилам действий над приближенными значениями в заданиях 3 и 4 вычисленные длины неизвестных сторон следует округлять с точностью до целых (по менее точному данному). Мы округлили результаты до десятых для того, чтобы получить более точное представление о соотношениях между элементами рассматриваемых треугольников.

IV. Самостоятельная работа

1. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 10 см, а синус угла B равен 0,7. Найдите катеты треугольника.

2. В прямоугольном треугольнике катет равен 3 см, а тангенс противолежащего ему угла равен 0,75. Найдите второй катет и гипотенузу.

V. Домашнее задание

Решить задачи № 57, 61(1а, 2а, 3а, 4а).

Указания к задачам

57. ΔABH — прямоугольный (см. рис. 7.49), $\sin A = \frac{BH}{AB}$, $\sin A = \frac{BH}{AB} = \frac{120}{241} \approx 0{,}4979$, откуда $\angle A \approx 29°52'$, тогда $\angle C = \angle A \approx 29°52$, $\angle B = \angle D = 180° - \angle A \approx 150°8'$.

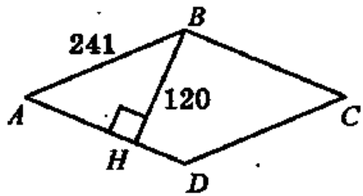


Рис. 7.49

61. Р е ш е н и е (рис. 7.48).

1 а) Если даны два катета: $a = 3$, $b = 4$, то $c = \sqrt{9+16} = 5$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} = \ = 0{,}75$, откуда $\alpha \approx 36°52'$; $\beta = 90° - \alpha \approx 53°8'$.

О т в е т: 5, 36°52'; 53°8'.

2 а) Если даны гипотенуза и катет: $c = 13$, $a = 5$, то $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{8 \cdot 18} = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12$; $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} \approx 0{,}3846$, откуда $\alpha \approx 22°37'$; $\beta = 90° - \alpha \approx 67°23'$.

О т в е т: 12; 22°37'; 67°23'.

3а) Если даны гипотенуза и острый угол: $c = 2$, $\alpha = 20°$, то $\sin 20° \approx 0{,}3420$, $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, тогда $a \approx 2 \cdot 0{,}3420 = 0{,}6840 \approx 0{,}7$; $\cos 20° \approx 0{,}9397$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, тогда $b \approx 2 \cdot 0{,}9397 = 1{,}8794 \approx 1{,}9$; $\beta = 90° - 20° = 70°$.

О т в е т: 0,7; 1,9; 70°.

4 а) Если даны катет и противолежащий угол: $a = 3$, $\alpha = 30°27'$, то $\sin 30°27' \approx 0{,}5068$, $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, тогда $c \approx \frac{3}{0{,}5068} \approx 5{,}9195 \approx 5{,}9$;

$\text{tg}\,30°27' \approx 0{,}5879$, $\text{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, тогда $b \approx \frac{3}{0{,}5879} \approx 5{,}1029 \approx 5{,}1$; $\beta = 90° - 30°27' = 59°33'$.

Ответ: 5,9; 5,1; 59°33′.

Дополнительные задачи

1. В прямоугольном треугольнике катет равен 9 см, а косинус прилежащего угла равен 0,3. Найдите второй катет.

Ответ: $3\sqrt{91}$ см.

2. В прямоугольном треугольнике косинус одного из острых углов равен 0,6, а косинус другого острого угла равен 0,8. Найдите тангенсы этих углов.

Ответ: $\frac{4}{3}$ и $\frac{3}{4}$.

Урок 31

ТЕМА: Значения синуса, косинуса и тангенса некоторых углов

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Материал, связанный со значениями тригонометрических функций углов 30°, 45° и 60°, предлагается рассмотреть до материала пункта «Основные тригонометрические тождества». Это сделано для того, чтобы не прерывать направленность задач, рассматривавшихся в предыдущем пункте, а именно — задач на решение прямоугольных треугольников.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать значения синуса, косинуса и тангенса углов 30°, 45° и 60°;

уметь воспроизводить доказательство теоремы 7.4, решать задачи на вычисление с использованием значения синуса, косинуса и тангенса углов 30°, 45° и 60°.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Анализ выполнения самостоятельной работы — 5 мин	
3	Изучение нового материала — 18 мин	Значения тригонометрических функций углов 30°, 45° и 60°, формулы приведения для тригонометрических функций углов (90° – α)
4	Решение задач — 10 мин	Задачи № 67, 69
5	Домашнее задание — 2 мин	Контрольный вопрос 12, 13. Задачи № 66, 68

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить решение задач № 61 и 57 с выполнением рисунка и выкладок на доске.

II. Анализ выполнения самостоятельной работы

При проверке вычислений следует повторить определения синуса, косинуса и тангенса острого угла.

III. Изучение нового материала

1. Формулировку теоремы 7.4 необходимо прокомментировать.

Для любого острого угла α

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \qquad \text{и} \qquad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

Выполнив рисунок (см. рис. 7.48), необходимо заметить, что в прямоугольном треугольнике острые углы α и β в сумме составляют 90°, поэтому в теореме речь идет о том, что синус одного из острых углов прямоугольного треугольника равен косинусу другого острого угла и обратно.

Доказательство теоремы может быть проведено учащимися в ходе ответов на ряд поставленных учителем вопросов:

1) В прямоугольном треугольнике (рис. 7.48) один острый угол равен α. Чему равен второй острый угол?

Ответ: $90° - \alpha$.

2) Запишите, чему равны $\sin\alpha$ и $\cos(90° - \alpha)$.

Ответ: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c}$. Сделайте вывод.

Ответ: $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$.

3) Запишите, чему равны $\cos\alpha$ и $\sin(90° - \alpha)$.

Ответ: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c}$. Сделайте вывод.

Ответ: $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$.

2. Вычисление значений тригонометрических функций для углов 30°, 45° и 60° тоже можно провести в виде решения задач.

Решить задачу

В равнобедренном прямоугольном треугольнике катет равен 1. Чему равен острый угол треугольника? Найдите синус, косинус и тангенс острого угла треугольника.

Решение.

1) Пусть в ΔABC $\angle C = 90°$, $AC = BC = 1$ (рис. 7.50), тогда $\angle A = \angle B = 90° : 2 = 45°$, по теореме Пифагора $AB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

2) $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = 1$.

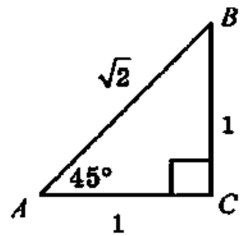


Рис. 7.50

Вывод:

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45° = 1.$$

Решить задачу

Сторона равностороннего треугольника ABC равна 2, AD — медиана треугольника. Чему равны $\angle B$ и $\angle BAD$? Найдите синус, косинус и тангенс этих углов.

Решение.

1) Пусть в ΔABC $AB = BC = AC = 2$ (рис. 7.51), тогда $\angle A = \angle B = \angle C = 180° : 3 = 60°$, медиана AD является высотой и биссектрисой, тогда в прямоугольном треугольнике ABD $\angle B = 60°$, $\angle BAD = 30°$, $AB = 2$, $BD = 1$.

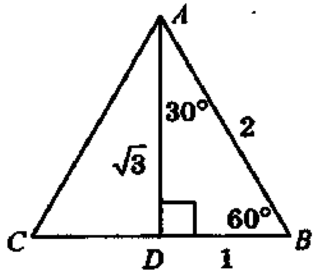


Рис. 7.51

2) По теореме Пифагора $AD = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

3) $\sin \angle BAD = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{1}{2}$,

$\cos \angle BAD = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \angle BAD = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\sin B = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos B = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg} B = \dfrac{AD}{BD} = \sqrt{3}$.

Вывод:

$$\boxed{\begin{array}{c} \sin 30° = \dfrac{1}{2}, \quad \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60° = \dfrac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}. \end{array}}$$

Замечание.

Эти результаты можно было бы получить быстрее, если использовать известный из курса 7 класса факт: ***катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы***. Тогда вместо половины равностороннего треугольника можно было бы сразу рассматривать прямоугольный треугольник с углами 30° и 60°, в котором катет равен 1, а гипотенуза равна 2 (рис. 7.52).

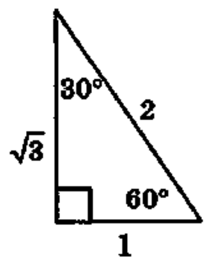


Рис. 7.52

3. Как показывает опыт, для решения первых задач на использование значения синуса, косинуса и тангенса некоторых углов полезно иметь в классе таблицу, в которой эти значения даны. Кроме того, можно рядом с таблицей поместить рисунки прямоугольных треугольников, с помощью которых легко установить эти значения (рис. 7.53).

α	30°	60°	45°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1

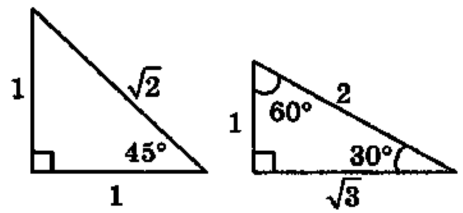


Рис. 7.53

IV. Решение задач

Решить задачу № 67

Прежде чем приступить к решению задачи, следует обсудить рассматриваемую фигуру и искомые элементы. Необходимо вспомнить с учащимися, что центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис треугольника, а центр описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Для равностороннего треугольника обе точки совпадают – это точка пересечения биссектрис (медиан, высот) треугольника, которую называют просто центром треугольника.

Дано: ΔABC — равносторонний, $AB = a$.

Найти: r и R (радиусы вписанной и описанной окружностей).

Р е ш е н и е.

1-й способ.

1) Пусть O — центр треугольника ABC (рис. 7.54). Тогда $OA = R$, $OD = r$.

2) В ΔAOD $AD = \frac{a}{2}$, $\angle OAD = 60° : 2 = 30°$ (т.к. BD — медиана, AO — биссектриса).

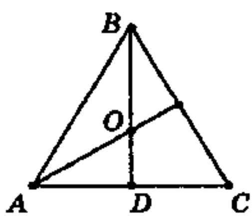


Рис. 7.54

$$r = OD = AD\cdot\text{tg}30^\circ = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

$$R = AO = \frac{AD}{\cos 30^\circ} = \frac{a}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

2-й способ.

1) Пусть O — центр треугольника ABC (рис. 7.53). Тогда $BO = R, OD = r$.

2) $BD = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

3) Т.к. O — точка пересечения медиан, то $BO : OD = 2 : 1$, тогда $BO = \frac{2}{3}\cdot BD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OD = \frac{1}{3}\cdot BD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Решить задачу № 69

Дано: ΔABC $AB = 1$м, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$.

Найти: AC и BC.

Решение.

1) Проведем $CD \perp AB$. (рис. 7.55). Т.к. CD — высота, опущенная из вершины тупого угла ($\angle C = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$), то точка D лежит между точками A и B.

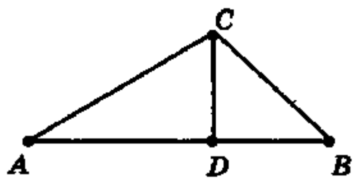


Рис. 7.55

2) Пусть $DB = x$. Тогда $AD = 1 - x$.

3) В ΔCDB: $\text{tg}\, B = \frac{CD}{DB}$, т.е. $1 = \frac{CD}{x}$, откуда $CD = x$.

В ΔACD: $\text{tg}A = \frac{CD}{AD}$, т.е. $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{1-x}$, откуда $x\sqrt{3} = 1 - x$, $x\left(\sqrt{3}+1\right) = 1$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$.

4) В ΔCDB: $CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \approx 0{,}5$ (м).

В ΔACD: $AC = 2 \cdot CD = 2x = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} - 1 \approx 0,7$ (м).

Ответ: $AC \approx 0,7$ м, $BC \approx 0,5$ м.

Замечание. Приведено решение с использованием значений тригонометрических функций углов. Это сделано для того, чтобы дать возможность закрепить вновь изученный материал в решении задачи. Однако можно подобные задачи решать, не используя его. Тогда следует применять следующие факты:

— в прямоугольном треугольнике с углом 45° второй острый угол тоже равен 45° и катеты равны;

— в прямоугольном треугольнике с углом 30° катет, лежащий против этого угла, равен половине гипотенузы;

— в прямоугольном треугольнике с углом 60° второй острый угол равен 30° и катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы.

Для рассматриваемой задачи 69 это означает, что если $DB = x$, то $CD = x$, $AD = 1 - x$, $AC = 2x$.

Тогда $(1-x)^2 + x^2 = 4x^2$, $2x^2 + 2x - 1 = 0$, $4x^2 + 4x - 2 = 0$, $(2x+1)^2 - 3 = 0$, $2x + 1 = \pm\sqrt{3}$, $x = \dfrac{\pm\sqrt{3}-1}{2}$, а т.к. $x > 0$, то $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

(Такое же выражение получится, если исключить иррациональность в знаменателе выражения $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$.)

V. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 12, 13. Решить задачи № 66, 68.

Указания к задачам

66. Пусть искомый катет равен x. Тогда $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x}{a}$, откуда $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

68. Нужно рассмотреть два случая: когда угол, равный 45°, прилежит к отрезку 21 см или к отрезку 20 см (рис. 7.56, *а*, *б*). В первом случае боковые стороны равны $\sqrt{441+441} = \sqrt{882}$ и

$\sqrt{441+400}=\sqrt{841}=29$, большая боковая сторона равна $\sqrt{882}$. Во втором случае боковые стороны равны $\sqrt{441+400}=\sqrt{841}=29$ и $\sqrt{400+400}=\sqrt{800}$, бо́льшая боковая сторона равна 29.

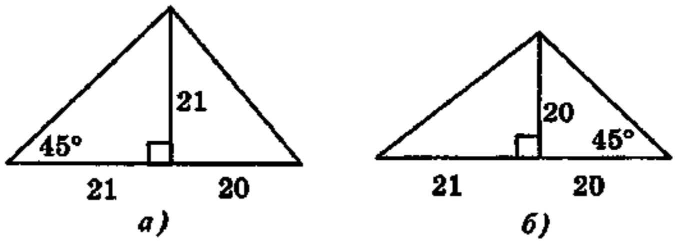


Рис. 7.56

Дополнительные задачи

1. Найдите сторону равностороннего треугольника, если

а) радиус окружности, описанной около треугольника, равен 7 см;

б) радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 3 см.

Ответ: $7\sqrt{3}$ см, $6\sqrt{3}$ см.

2. Углы при основании трапеции равны 45° и 30°, а высота трапеции равна 6 см. Найдите боковые стороны трапеции.

Ответ: $6\sqrt{2}$ см, 12 см.

Урок 32

ТЕМА: Значения синуса, косинуса и тангенса некоторых углов

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать значения синуса, косинуса и тангенса углов 30°, 45° и 60°;

уметь решать задачи на вычисление с использованием значений синуса, косинуса и тангенса углов 30°, 45° и 60°.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 10 мин	
2	Решение задач — 18 мин	Дидактические задачи на закрепление изученного материала
3	Самостоятельная работа — 10 мин	
4	Домашнее задание — 2 мин	Задачи № 70, 71

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 12, решение задач 66 и 68 устно с выполнением рисунка на доске.

II. Решение задач

Решить задачу

Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°. Найдите основание, если боковая сторона равна 12 см.

Решение.

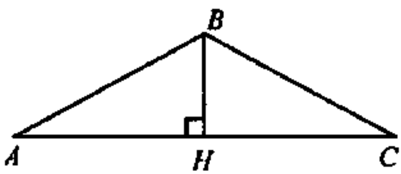


Рис. 7.57

1) ΔABC: $AB = BC$, тогда медиана BH является высотой и биссектрисой (рис. 7.57), т.е. $\angle ABH = 60°$.

2) ΔABH: $\angle A = 90° - 60° = 30°$.

Т.к. $\cos A = \dfrac{AH}{AB}$, то $AH =$

$= 12 \cdot \cos 30° = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (см).

3) Т.к. BH — медиана, то $AC = 2AH = 12\sqrt{3}$ (см).

Ответ: $12\sqrt{3}$ см.

Решить задачу

Диагональ параллелограмма равна а и перпендикулярна его стороне. Чему равны стороны параллелограмма, если угол параллелограмма равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°?

Решение.

ΔABD: $\sin A = \dfrac{BD}{AB}$, $\text{tg}A = \dfrac{BD}{AD}$ (рис. 7.58). Отсюда: $AB = \dfrac{a}{\sin A}$, $AD = \dfrac{a}{\text{tg}A}$.

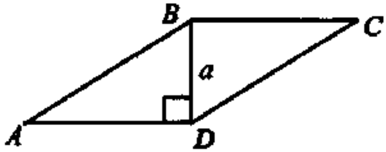


Рис. 7.58

а) $AB = \dfrac{a}{\frac{1}{2}} = 2a$, $AD = \dfrac{a}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = a\sqrt{3}$; б) $AB = \dfrac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = a\sqrt{2}$, $AD = \dfrac{a}{1} = a$; в) $AB = \dfrac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$, $AD = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Ответ: а) 2а, $a\sqrt{3}$; б) $a\sqrt{2}$, а; в) $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

III. Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если гипотенуза равна 6 см, а один из углов равен 60°.

Ответ: 3 см и $3\sqrt{3}$ см.

2. Найдите углы равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна $4\sqrt{2}$, а его основание равно 8.

Ответ: 45°, 45°, 90°.

Вариант 2

1. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если гипотенуза равна 4 см, а один из углов равен 45°.

Ответ: $2\sqrt{2}$ см и $2\sqrt{2}$ см.

2. Найдите углы равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 6, а его основание равно $6\sqrt{3}$.

Ответ: 30°, 30°, 120°.

IV. Домашнее задание

Решить задачи № 70, 71.

Указания к задачам

70. Решение. 1) Пусть $AC = 2CD$ (рис. 7.59).

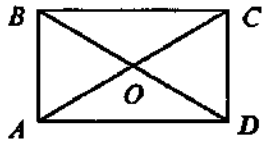


Рис. 7.59

Тогда в ΔCAD $\sin\angle CAD = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{1}{2}$, $\angle CAD = 30°$.

2) $AO = OD$ (по свойству диагоналей прямоугольника).

3) В ΔAOD $\angle OAD = \angle ODA = 30°$, $\angle AOD = 180° - 30° - 30° = 120°$, $\angle COD = 180° - \angle AOD = 60°$.

71. Решение. 1) $AC \perp BD$ как диагонали ромба (рис. 7.60).

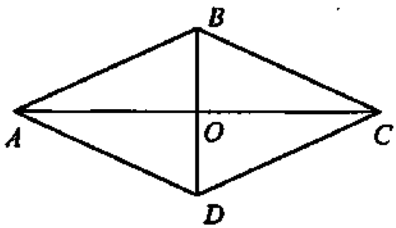


Рис. 7.60

2) ΔAOB: $\operatorname{tg}\angle OAB = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{a}{2} : \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, тогда $\angle OAB = 30°$.

3) $\angle BAD = 2\angle OAB = 60°$ (диагональ ромба – биссектриса его угла), $\angle ABC = 180° - \angle BAD$ (углы, прилежащие к одной стороне ромба), т.е. $\angle ABC = 120°$.

Ответ: $60°$ и $120°$.

Дополнительные задачи

1. Через точки P и S окружности с центром O проходят касательные MP и MS. Найдите радиус и отрезки MP и MS, если $OM = 22$ см, $\angle PMS = 60°$.

Ответ: $MP = MS = 22 \cdot \cos 30° = 11\sqrt{3}$ см, $R = 22 \cdot \sin 30° = 11$ см.

2. Из точки A к прямой l проведены перпендикуляр AO и наклонная AB. Найдите угол BAO, если $AB = 6$, $AO = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $\cos A = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle A = 30°$.

Урок 33

ТЕМА: Основные тригонометрические тождества

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Доказательства основных тригонометрических тождеств, данные в учебном пособии, достаточно просты для понимания; однако эти доказательства содержат искусственный прием: деление обеих частей рассматриваемого равенства на одно и то же выражение. Поэтому воспроизведения вывода формул можно в обязательном порядке от учащихся не требовать. Вместе с тем сами формулы необходимы для решения задач не только данного параграфа, но и в решении отдельных задач других разделов. Полезно также (но не обязательно) ввести дополнительно определение котангенса острого угла и формулы, связанные с котангенсом.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать выведенные тригонометрические тождества;

уметь применять их для вычисления $\sin\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, если известно значение $\cos\alpha$, и для вычисления $\cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, если известно значение $\sin\alpha$, а также для упрощения тригонометрических выражений.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Анализ выполнения самостоятельной работы — 5 мин	
3	Изучение нового материала — 13 мин	Определение котангенса острого угла, тождества: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$
4	Решение задач — 15 мин	Задачи № 62 (2, 6, 8), 63 (2), 64 (2)

№	Этап урока	Содержание работы
5	Домашнее задание — 2 мин	Контрольный вопрос 11 (без доказательства). Задачи № 62 (1, 7), 63 (1), 64 (1)

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить решение задач № 70 и 71 устно с выполнением рисунка на доске. В ходе проверки полезно обсудить два способа решения: один – связанный с применением значений тригонометрических функций углов, другой – без применения тригонометрии. При этом в задаче 70 доказываем, что ΔAOB – равносторонний, то есть $\angle AOB = 60°$, а в задаче 71 по теореме Пифагора вычисляем сторону ромба и доказываем, что ΔABD – равносторонний, то есть $\angle BAD = 60°$.

II. Анализ выполнения самостоятельной работы

Вычислительная часть решения задач самостоятельной работы записывается на доске, обоснования проводятся устно.

III. Изучение нового материала

Доказательство тождеств можно провести как решение задач, которые рассматриваются с классом в ходе фронтальной работы. При этом на доске и в тетрадях выполняются записи выкладок, а учитель с помощью специальных вопросов и указаний помогает выработать путь решения каждой из задач.

1. ***Решить задачу***

Докажите тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Р е ш е н и е.

1) Пусть в ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$ (рис. 7.61).

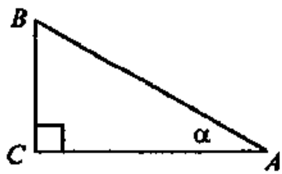


Рис. 7.61

Указание. Запишите тождество, которое требуется доказать для угла α треугольника ABC.

2) $\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=1$.

Указание. Запишите теорему Пифагора для треугольника ABC и разделите обе части записанного равенства на AB^2.

3) $BC^2+AC^2=AB^2$, $\frac{BC^2}{AB^2}+\frac{AC^2}{AB^2}=1$, $\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=1$, т.е. тождество доказано.

2. *Решить задачу*

Докажите тождество $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Решение.

Указание. Запишите тождество, которое требуется доказать, заменив $\mathrm{tg}\alpha$ на $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, и приведите к общему знаменателю левую часть равенства.

1) $1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Вопрос. Почему верно последнее равенство? Сделайте вывод.

2) Равенство верно, т.к. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, а значит, верно и доказываемое тождество.

3. Введем определение котангенса острого угла прямоугольного треугольника.

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету.

Из определения видно, что котангенс угла α является числом, обратным тангенсу угла α, а это означает, что справедливы также формулы: $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$ и $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

4. *Решить задачу*

Докажите тождество $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Решение.

Указание. Используйте аналогию с доказательством, проведенным в предыдущей задаче.

1) Докажем, что $1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, т.е. $\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

2) Это равенство верно, т.к. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, а значит, верно и доказываемое тождество.

5. Все доказанные тождества, включая рассмотренное раньше тождество $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, полезно представить на плакате, который вывешивается в классе при отработке навыков применения этих тождеств в решении задач. Учащимся можно также предложить записать дома в тетрадях все эти тождества в сводную таблицу.

Прежде чем перейти к решению задач, следует отметить, что доказанные тождества применяются в решении задач в двух случаях:

1) когда по одной из величин $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ нужно найти одну или несколько из остальных, например, используя тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, можно, зная $\sin\alpha$, найти $\cos^2\alpha$, а затем $\cos\alpha$ и наоборот, а используя тождество $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, можно, по $\cos\alpha$ найти $\operatorname{tg}^2\alpha$, а затем $\operatorname{tg}\alpha$, и по $\operatorname{tg}\alpha$ найти $\cos^2\alpha$, а затем $\cos\alpha$);

2) когда требуется упростить выражение, содержащее $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

IV. Решение задач

Решить задачу № 62 (2, 6, 8)

Решение.

2) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

6) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\,(1-\sin^2\alpha)=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=$
$=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

8) $\operatorname{tg}^2\alpha\,(2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-1)=\operatorname{tg}^2\alpha\,(2\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha))=$
$=\operatorname{tg}^2\alpha\,(2\cos^2\alpha-\cos^2\alpha)=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

III. Решение задач

Решить задачу № 19

При решении задачи 19, разобранной в учебнике, полезно привлечь внимание учащихся к тому факту, что искомая точка лежит на оси x, а значит, имеет координаты $(x, 0)$.

Дано: $A(1; 2)$ и $B(2; 3)$, $M(x; 0)$, $AM = BM$.

Найти: $M(x; 0)$.

Решение.

$AM^2 = (x-1)^2 + (0-2)^2$, $BM^2 = (x-2)^2 + (0-3)^2$,

$AM^2 = BM^2$, т.е. $x^2 - 2x + 1 + 4 = x^2 - 4x + 4 + 9$, $2x = 8$, $x = 4$.

Ответ: $M(4; 0)$.

Замечание. Рисунок к решению данной задачи можно не выполнять или сделать рисунок после вычислений. При этом можно обратить внимание учащихся на то, что две данные точки лежат на окружности с центром в искомой точке M.

Решить задачу № 21

Полезно вначале изобразить квадрат $ABCD$ и наметить план решения. Квадрат — это фигура, которая является одновременно ромбом и прямоугольником. Прямоугольник — это параллелограмм с равными диагоналями. Таким образом, следует установить, что а) все стороны четырехугольника равны; б) его диагонали равны.

Решение.

1) $AB = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, $BC = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $CD = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, $AD = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, т.к. $AB = BC = CD = AD$, то $ABCD$ — ромб.

2) $AC = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50}$, $BD = \sqrt{1^2+7^2} = \sqrt{50}$.

т.к. в параллелограмме $ABCD$ $AC = BD$, то $ABCD$ — прямоугольник,

т.к. в прямоугольнике $ABCD$ все стороны равны, то $ABCD$ — квадрат.

Замечание. Можно было бы решить задачу другим путем: а) доказать, что у четырехугольника диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то есть он является параллелограммом; б) доказать, что его диагонали равны, то есть данный параллелограмм является прямоугольником; в) доказать, что его стороны равны, то есть это квадрат.)

Решить задачу

Найдите координаты центра и радиус окружности, диаметром которой является отрезок AB, если A (10; 6) и B(−8; −18).

Р е ш е н и е .

1) Пусть $C(x;\ y)$ — центр окружности, тогда $x=\frac{10-8}{2}=1$, $y=\frac{6-18}{2}=-6$;

2) $R^2 = AC^2 = (1-10)^2 + (6+6)^2 = 15^2$, $R = 15$.

О т в е т: $C(1; -6)$, $R = 15$.

Решить задачу

Даны точки A (0; −3), B (2; 3) и C (6; −1). Докажите, что △ABC — равнобедренный с основанием BC. Найдите длину медианы BM и длину биссектрисы AK.

Р е ш е н и е .

1) $AB^2 = 2^2 + 6^2 = 40$, $BC = 4^2 + 4^2 = 32$, $AC^2 = 6^2 + 2^2 = 40$, откуда $AB = AC$.

2) $M(x_1;\ y_1)$ — середина AC, $x_1 = \frac{0+6}{2}=3$, $y_1 = \frac{-3-1}{2}=-2$; $BM^2 = (3-2)^2 + (-2-3)^2 = 26$, $BM = \sqrt{26}$.

3) т.к. $AB = AC$, то биссектриса AK является и медианой, т.е. $K(x_2; y_2)$ — середина BC, $x_2 = \frac{2+6}{2}=4$, $y_2 = \frac{3-1}{2}=1$; $AK^2 = (4-0)^2 + (1+3)^2 = 32$, $AK = 4\sqrt{2}$.

О т в е т: $BM = \sqrt{26}$, $AK = 4\sqrt{2}$.

IV. Самостоятельная работа

1-й вариант

1. Прямая, параллельная оси x, проходит через точку A (2; 1) и пересекает ось y в точке B. Найдите координаты точки B.

О т в е т: (0; 1).

2. AB — диаметр окружности. Найдите координаты центра окружности и ее радиус, если A (1; 5), B (7; 3).

О т в е т: (4; 4), $\sqrt{10}$.

2-й вариант

1. Найдите координаты точки пересечения оси x с прямой, перпендикулярной оси x и проходящей через точку A (7; 4).

Ответ: (7; 0).

2. Найдите длину медианы CD треугольника с вершинами в точках A (7; 3), B (5; 1) и C (− 4; 4).

Ответ: $\sqrt{104}$

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольный вопрос 5. Решить задачи № 17, 18, 22.

Указания к задачам

17. $AB = \sqrt{9+16} = 5$, $AC = \sqrt{36+64} = 10$, $BC = \sqrt{9+16} = 5$.

18. Если бы точки A, B и C не лежали на одной прямой, т.е. были вершинами треугольника, то каждый из отрезков AB, BC и AC был бы строго меньше суммы двух других. Однако $AC = AB + BC$. Отсюда следует, что точки лежат на одной прямой.

Из равенства $AC = AB + BC$ следует, что именно точка B лежит между точками A и C, так как если бы между двумя другими лежала точка A или точка C, то выполнялось бы другое равенство: либо $BC + CA = AB$, либо $CA + AB = BC$.

22. Отрезок с концами A(1; 0) и C(−1; 0) и отрезок с концами B(0; 1) и D(0; −1) лежат на осях, они перпендикулярны, равны и делятся в начале координат пополам. Значит, $ABCD$ — ромб и прямоугольник, т.е. квадрат.

Дополнительные задачи

1. Докажите, что треугольник CDE является равнобедренным и найдите координаты середин его боковых сторон, если даны координаты его вершин: а) C (3; 4), D (6; 8), E (10; 5); б) C (3; − 1), D (9; 5), E (2; 6).

2. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$ с вершинами в точках A (−13; −7), B (−1; 9), C (11; 0), D (−1; −16).

Ответ: Р = 20 + 15+ 20 + 15 = 70.

3. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках $A(-3, -3)$, $B(-4; 4)$, $C(3; 5)$, $D(4; -2)$ является прямоугольником.

4. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках $A(-5; -6)$, $B(-2; 3)$, $C(10; 9)$, $D(7; 0)$ является параллелограммом и определите длины его сторон.

Урок 41

ТЕМА: Уравнение окружности

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Изучение материала пункта 74 существенным образом опирается на понятие уравнения фигуры. Фактически, это понятие тесно связано с понятием геометрического места точек. В частности, здесь идет речь о фигуре, которая является геометрическим местом точек, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению. Поскольку ***геометрическим местом точек плоскости называют фигуру, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством***, то обоснование того, что некоторая фигура является геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, включает доказательство двух взаимно обратных утверждений:

а) любая точка этой фигуры обладает указанным свойством;

б) любая точка, обладающая данным свойством, является точкой этой фигуры.

Поэтому в определении уравнения фигуры также рассматриваются два взаимнообратных утверждения. Одно из них дает способ установления того, что точка с данными координатами принадлежит или не принадлежит фигуре, заданной уравнением. От учащихся можно не требовать воспроизведения точной формулировки определения уравнения фигуры, достаточно, если они будут понимать смысл слов «уравнение окружности» или «уравнение прямой».

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать уравнение окружности;

уметь выводить уравнение окружности и применять его при решении задач.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 10 мин	Понятие уравнения фигуры. Уравнение окружности
3	Решение задач — 23 мин	Задачи № 28–31, дидактические задачи на уравнение окружности
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 6, 7. Задачи № 23, 25, 26

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопрос 5, решение задач № 17 устно, № 18 и 22 с выполнением рисунка на доске. Особое внимание обратить на обоснования решений задач № 18 и 22.

II. Изучение нового материала

1. Перед введением понятия *уравнения фигуры* полезно вспомнить с учащимися известное им из курса алгебры понятие уравнения с двумя переменными, рассмотрев примеры двух–трех таких уравнений. Например,

$$xy = 4, \qquad x^2 - y = 3, \qquad 2x + 3y = 6.$$

Далее проводится следующее рассуждение.

Все точки плоскости, у которых координаты x и y удовлетворяют данному уравнению, составят на координатной плоскости некоторую фигуру. ***Данное уравнение называется уравнением этой фигуры.*** При этом существенно, что выполняются два условия:

1) любая точка фигуры имеет координаты, удовлетворяющие данному уравнению;

2) любая точка плоскости, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, является точкой этой фигуры.

2. Для того чтобы *составить уравнение окружности* с центром в точке A_0 (a, b) и радиусом R, полезно вспомнить с учащимися определение окружности:

Окружность — это фигура, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от точки A_0 на одно и то же расстояние R.

1) Пусть A (x, y) — произвольная точка на окружности (рис. 8.15).

По формуле расстояния имеем: $AA_0^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$.

По определению окружности $AA_0 = R$.

Значит, координаты точки A удовлетворяют уравнению

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

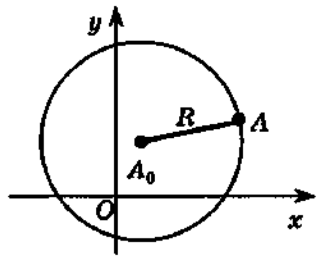


Рис. 8.15

2) Пусть координаты некоторой точки M (x, y) удовлетворяют уравнению $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Это означает, что расстояние от точки M до точки A_0 равно R, а это значит, что M лежит на окружности с центром A_0 и радиусом R.

Для закрепления выведенной формулы можно использовать задания:

Задание 1. *Составьте уравнение окружности с центром A и радиусом R, если:*

а) $A(7; 11)$, $R = 5$; б) $A(-2; 3)$, $R = 1$; в) $A(-3, -4)$, $R = 2$.

Ответ: а) $(x-7)^2 + (y-11)^2 = 25$; б) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$; в) $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 4$.

Задание 2. *Составьте уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом 8.*

Ответ: $x^2 + y^2 = 64$.

Задание 3. *Определите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением:*

а) $(x-2)^2+(y-5)^2=7^2$;

б) $(x-7)^2+(y+2)^2=25$;

в) $(x+1)^2+(y-5)^2=3$.

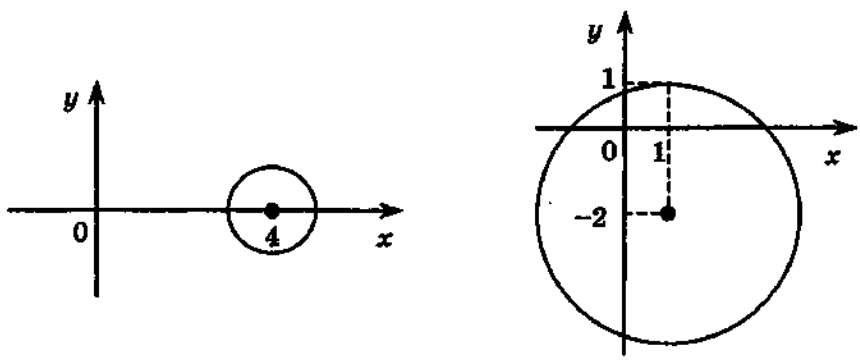
О т в е т: а) $(2; 5)$, 7; б) $(7; -2)$, 5; в) $(-1; 5)$, $\sqrt{3}$.

Задание 4. *Постройте в координатной плоскости окружность, заданную уравнением:*

а) $(x-4)^2+y^2=1$;

б) $(x-1)^2+(y+2)^2=9$.

О т в е т: рис. 8.16.



а) *б)*

Рис. 8.16

II. Решение задач

Решить задачу

Проверьте, лежит ли точка M на окружности, заданной уравнением $(x-8)^2+(y+5)^2=100$, если а) $M(2; 3)$; б) $M(3; 2)$.

Р е ш е н и е .

а) $(2-8)^2+(3+5)^2=36+64=100$, значит, точка лежит на данной окружности;

б) $(3-8)^2+(2+5)^2=25+49\neq 100$, значит, точка не лежит на данной окружности.

Решить задачу

Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB на рис. 8.17.

Решение.

1) $A(-4;\ -2)$, $B(2;\ 6)$. Т.к. центр окружности — это середина диаметра, то точка C имеет координаты:

$x = \frac{-4+2}{2} = -1$, $y = \frac{-2+6}{2} = 2$, $C(-1;\ 2)$.

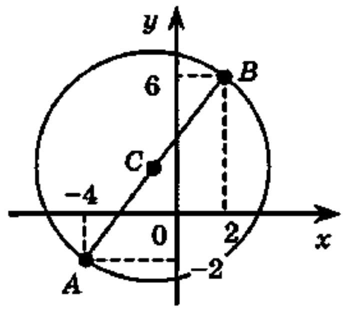


Рис. 8.17

2) $R = CB = \sqrt{(2+1)^2 + (6-2)^2} =$
$= \sqrt{9+16} = 5.$

3) Уравнение окружности: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Решить задачу № 28

Составьте уравнение окружности с центром в точке (1; 2), касающейся оси x.

Решение.

1) Если окружность касается оси x, то расстояние от центра $C(1;\ 2)$ до оси x равно радиусу окружности, т.к. касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания (рис. 8.18). Таким образом, $R = 2$.

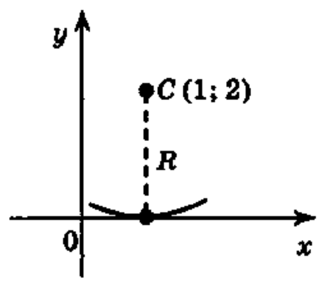


Рис. 8.18

2) Уравнение окружности имеет вид: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Решить задачу № 29

Составьте уравнение окружности с центром в точке (−3; 4), проходящей через начало координат.

Решение.

1) ΔCAO (рис. 8.19): $AO = 3$, $AC = 4$, CO — радиус окружности.

По теореме Пифагора $R^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2$, $R = 5$.

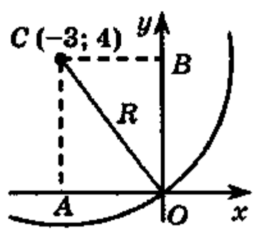


Рис. 8.19

2) Уравнение окружности имеет вид: $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Решить задачу № 30

Решение.

1) Перегруппируем слагаемые в левой части уравнения и выделим полные квадраты двучленов, один из которых содержит переменную x, а другой — y:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = x^2 + ax + y^2 + by + c =$$

$$= (x^2 + ax + \frac{a^2}{4}) + (y^2 + by + \frac{b^2}{4}) - \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c\right).$$

Тогда уравнение будет иметь вид:

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c\right).$$

Если $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$, то правая часть есть квадрат некоторого числа. Таким образом, получилось уравнение окружности с центром $(-\frac{a}{2};\ -\frac{b}{2})$ и радиусом $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$.

Решить задачу № 31

Перед решением задачи необходимо провести следующее рассуждение. Точка пересечения двух окружностей лежит одновременно на каждой из них, а значит, координаты этой точки удовлетворяют каждому из уравнений. Таким образом, координаты точки пересечения окружностей являются решением системы, составленной из данных двух уравнений.

Решение.

1) Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x + y - 2 = 0. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения второе, получим: $2x - y + 1 = 0$, $y = 2x + 1$. Подставим это выражение в первое уравнение: $x^2 + (2x + 1)^2 = 1$, $5x^2 + 4x = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}8$. Подставив эти значения в уравнение $y = 2x + 1$, получим $y_1 = 1$, $y_2 = -0{,}6$.

Ответ: (0; 1) и (−0,8; −0,6).

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 6, 7. Решить задачи № 23, 25, 26.

Указания к задачам

23. $1 + 4 \neq 25$, $9 + 16 = 25$, $16 + 9 = 25$, $0 + 25 = 25$, $25 + 1 \neq 25$, таким образом, на данной окружности лежат точки (3; 4), (−4; 3), (0; 5).

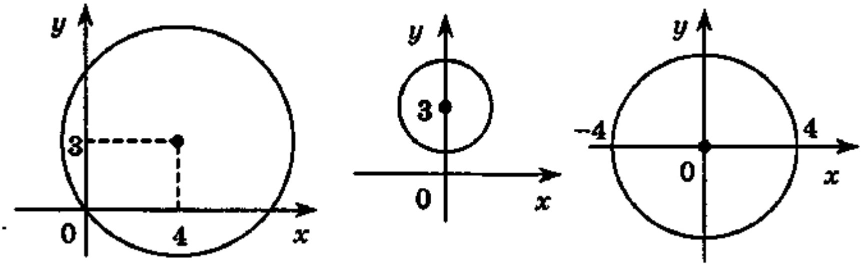
25. Центром окружности является середина отрезка AB — точка с координатами $\dfrac{2-2}{2} = 0$ и $\dfrac{0+6}{2} = 3$. Квадрат радиуса AC равен $(0 - 2)^2 + (3 - 0)^2 = 13$. Уравнение окружности: $x^2 + (y - 3)^2 = 13$.

26. Квадрат радиуса AC равен $(-4 + 1)^2 + (3 + 1)^2 = 25$. Уравнение окружности: $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Дополнительные задачи

1. Определите координаты центров и радиусы окружностей, изображенных на рис. 8.21, и составьте уравнения окружностей.

Ответ: а) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$; б) $x^2 + (y - 3)^2 = 4$; в) $x^2 + y^2 = 16$.



а) *б)* *в)*

Рис. 8.20

2. Даны точки A (6; 0) и B (10; 0). Запишите уравнения окружностей, для которых отрезок AB является: а) радиусом; б) диаметром.

Ответ. а) Если центр окружности в точке A, то уравнение окружности: $(x - 6)^2 + y^2 = 16$, если в точке B, то: $(x - 10)^2 + y^2 = 16$.

б) Центр окружности — середина отрезка AB — точка C (8, 0), $R = 2$, уравнение окружности: $(x - 8)^2 + y^2 = 4$.

3. Окружность с центром в точке A имеет радиус, равный 5. Запишите уравнение данной окружности, если система координат расположена так, как показано на рис. 8.22, *а, б, в*.

Ответ. а) $x^2 + y^2 = 25$; б) $x^2 + (y + 5)^2 = 25$; в) $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$.

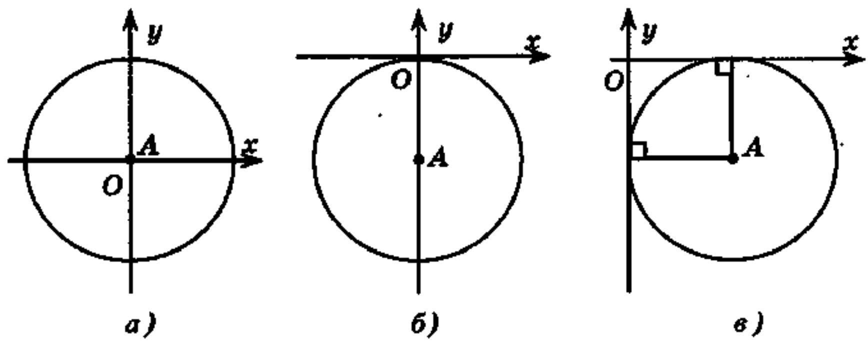


Рис. 8.21

Урок 42

ТЕМА: Уравнение прямой. Координаты точки пересечения прямых

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

1. Из курса алгебры VII класса учащимся известно, что графиком линейной функции $y = ax + b$ является прямая линия. В пункте 75 доказывается, что уравнением прямой является уравнение вида $ax + by + c = 0$.

2. Учащиеся сталкивались в курсе алгебры с заданиями на нахождение координат точек пересечения двух прямых, которые являются графиками линейных функций. В пункте 76 говорится о точке пересечения любых двух прямых, заданных уравнениями.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать общее уравнение прямой;

уметь составлять уравнение прямой по координатам двух ее точек, определять, принадлежит ли данная точка прямой, заданной уравнением, находить неизвестную координату точки по данной координате и уравнению прямой, вычислять координаты точки пересечения двух прямых.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 15 мин	Уравнение прямой
3	Решение задач — 18 мин	Задачи № 35, 40 (1), 39 (1), 38, 36 (1)
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 8, 9 (без доказательства). Задачи № 36(2), 39(2), 41

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 6, 7, решение задач № 23, 25, 26 устно, с выполнением рисунка на доске.

II. Изучение нового материала

1. Прежде чем приступать к выводу уравнения прямой, полезно рассмотреть с учащимися задачу, решение которой содержит такие же шаги, что и вывод уравнения прямой в общем виде, но данные точки имеют числовые, а не буквенные координаты. Например, составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек (0; 1) и (1; 2).

Координаты любой точки M (x, y), равноудаленной от точек (0; 1) и (1; 2), удовлетворяют уравнению $x^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$. Верно и обратное: если координаты точки удовлетворяют записанному уравнению, то она равноудалена от точек (0; 1) и (1; 2), так как в правой части уравнения квадрат расстояния до первой точки, а в левой — квадрат расстояния до второй данной точки.

Если в полученном уравнении раскрыть скобки, перенести все члены в левую часть и привести подобные члены, то оно примет вид $x + y - 2 = 0$. Таким образом, уравнение $x + y - 2 = 0$ является уравнением геометрического места точек, равноудаленных от точек A (0; 1) и B (1; 2). Другими словами, это уравнение является уравнением серединного перпендикуляра заданному отрезку, то есть прямой, перпендикулярной к отрезку AB и проходящей через его середину (рис. 8.22).

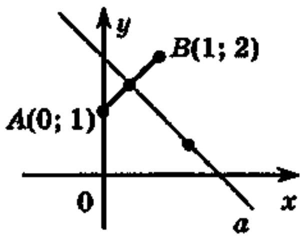


Рис. 8.22

2. Покажем, что любая прямая h имеет уравнение $ax + by + c = 0$. Чтобы вывести это уравнение, нужно взять две такие точки $A_1(a_1, b_1)$ и $A_2(a_2, b_2)$, чтобы прямая h была серединным перпендикуляром к отрезку A_1A_2, а затем, так же как при решении разобранной задачи, составить уравнение прямой h. Далее проводится доказательство в соответствии с текстом учебного пособия. Преобразования выражений полезно записать рядом с преобразованиями, выполненными ранее:

$x^2 + (y-1)^2 =$ $(x-1)^2 + (y-2)^2,$	$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 =$ $(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2,$
$x^2 + y^2 - 2y + 1 =$ $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4,$	$x^2 - 2xa_1 + a_1^2 + y^2 - 2yb_1 + b_1^2 =$ $x^2 - 2xa_2 + a_2^2 + y^2 - 2yb_2 + b_2^2,$
$2x + 2y - 4 = 0,$	$\underbrace{2\underbrace{(a_2-a_1)}_{a}x + 2\underbrace{(b_2-b_1)}_{b}y}_{c} +$
$x + y - 2 = 0,$	$+ (a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2) = 0,$
	$ax + by + c = 0,$

3. Необходимо обратить внимание учащихся на то, что с уравнениями прямой они уже встречались при изучении курса алгебры. Действительно, прямая, не параллельная оси y, является графиком линейной функции, а уравнением линейной функции является уравнение вида $y = kx + b$. Такой вид уравнение $ax + by + c = 0$ принимает, если при $b \neq 0$ разделить обе части этого уравнения на b: $\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0$ или $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

4. Так же как при рассмотрении уравнения окружности, необходимо обратить внимание учащихся на то, что условием принадлежности точки $M(x_0;\ y_0)$ прямой, заданной уравнением, является тот факт, что координаты x_0 и y_0 удовлетворяют уравнению прямой. Для закрепления этого рассуждения можно предложить задание:

Какие из точек $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$ и $C(-1;\ -5)$ принадлежат прямой, заданной уравнением $3x - y - 2 = 0$?

Решение. $3 \cdot 1 - 1 - 2 = 0$, $3 \cdot 2 - 3 - 2 \neq 0$,

$$3 \cdot (-1) - (-5) - 2 = 0.$$

Ответ: A и C.

5. Условие принадлежности точки данной прямой используется и при составлении уравнения прямой, проходящей через две заданные точки, как, например, в решении задачи 35, разобранной в тексте учебника в пункте 75. Можно предложить более доступный для учащихся путь составления уравнения прямой по координатам двух ее точек, если эта прямая не параллельна ни одной из осей.

Решить задачу № 35

Решение.

1) Точки A и B имеют разные абсциссы, значит, они не лежат на прямой, параллельной оси y. Тогда уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$.

2) Точки A и B лежат на этой прямой, значит, их координаты удовлетворяют ее уравнению:

$1 = -k + b$ и $0 = k + b$. Тогда $k = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, значит, уравнение прямой имеет вид $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Умножив обе части равенства на 2 и перенеся все члены в одну часть, получим уравнение прямой в виде $x + 2y - 1 = 0$.

6. При рассмотрении материала о пересечении двух прямых, с одной стороны, используем опыт решения соответствующих задач в курсе алгебры, с другой же стороны обращаем особое внимание на проведение рассуждения, приводящего к необходимости решения системы двух уравнений.

Если две прямые пересекаются в точке $M(x_0; y_0)$, то точка M принадлежит каждой из прямых, тогда ее координаты удовлетворяют каждому из уравнений прямых, а значит, координаты x_0 и y_0 являются решением системы двух уравнений, задающих прямые.

II. Решение задач

Решить задачу № 40 (1)

Решение.

$$\begin{cases} x+2y+3=0 \\ 4x+5y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+8y+12=0 \\ 4x+5y+6=0 \end{cases} \Rightarrow 3y+6=0, \qquad y=-2,$$

$x-4+3=0, \quad x=1$. Прямые пересекаются в точке $(1; -2)$.

Решить задачу № 39 (1)

Найдите точки пересечения с осями координат прямой, заданной уравнением $x+2y+3=0$.

Решение.

1) $y=0 \Rightarrow x+2\cdot 0+3=0$, откуда $x=-3$. Пересечение с осью x в точке $(-3; 0)$.

2) $x=0 \Rightarrow 0+2y+3=0$, откуда $y=-1{,}5$. Пересечение с осью y в точке $(0; -1{,}5)$.

Решить задачу № 38

Решение.

1) Подставим в уравнение координаты $x=1$ и $y=2$: $a\cdot 1+b\cdot 2=-1$, откуда $a=1-2b$.

2) Подставим в уравнение координаты $x=2$ и $y=1$: $a\cdot 2+b\cdot 1=-1$, откуда $2-4b+b=1$, $b=\frac{1}{3}$, $a=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Ответ: $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{3}$.

Решить задачу № 36 (1)

Составьте уравнение прямой AB, если A(2;3), B(3; 2).

Решение.

1) Точки A и B лежат на прямой, не параллельной оси y, значит, их координаты удовлетворяют уравнению $y = kx + b$, т.е $3 = 2k + b$ и $2 = 3k + b$.

$\begin{cases} 2k+b=3 \\ 3k+b=2 \end{cases} \Rightarrow k = -1$, $-2 + b = 3$, $b = 5$, уравнение прямой имеет вид $y = -x + 5$ или $x + y - 5 = 0$.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 8, 9 (без доказательства). Решить задачи № 36(2), 39(2), 41.

Указания к задачам

36(2). $\begin{cases} 4k+b=-1 \\ -6k+b=2 \end{cases} \Rightarrow 10k = -3$, $k = -0{,}3$, $b = -1 + 1{,}2 = 0{,}2$, уравнение прямой: $y = -0{,}3x + 0{,}2$ или $3x + 10y - 2 = 0$.

39(2). $y = 0 \Rightarrow x = 4$; $x = 0 \Rightarrow y = 3$. Пересечение с осями в точках (4; 0) и (0; 3).

41. $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=6 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Rightarrow 5y = 5$, $y = 1$, $x = 3 - 2 = 1$. Точка (1; 1) лежит на прямой $3x + y = 4$, так как $3 \cdot 1 + 1 = 4$. Значит, и третья прямая проходит через точку пересечения первых двух.

42. 1) Пусть даны вершины треугольника $A(1; 0)$, $B(2; 3)$ и $C(3; 2)$. Тогда серединой стороны AB является точка $M(1{,}5; 1{,}5)$, а серединой стороны AC — точка $K(2; 1)$.

2) Т.к. точки B и K имеют абсциссу 2, то уравнением прямой BK является уравнение $x = 2$.

3) Т.к. у точек M и C разные абсциссы, то прямая MC не параллельна оси Oy и ее уравнение имеет вид $y = kx + b$. Подставим в это уравнение координаты точек M и C: $1{,}5 = 1{,}5k + b$ и $2 = 3k + b$, то-

гда $1,5 - 1,5k = 2 - 3k$, $k = \frac{1}{3}$, $b = 2 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$, т. е. уравнение прямой MC: $y = \frac{1}{3}x + 1$ или $x - 3y + 3 = 0$.

4) Координаты точки пересечения прямых BK и MC удовлетворяют обоим уравнениям: $x - 3y + 3 = 0$ и $x = 2$, откуда $3y = 5$, $y = \frac{5}{3}$.

Ответ: $(2; \frac{5}{3})$.

Дополнительные задачи

1. *Является ли точка C точкой пересечения прямых $3x - 4y - 8 = 0$ и $3x + 4y - 16 = 0$, если:* а) $C(0; -2)$; б) $C(4; 1)$?

Ответ: а) нет, т.к. C не лежит на второй прямой; б) да, т.к. C лежит на каждой из прямых.

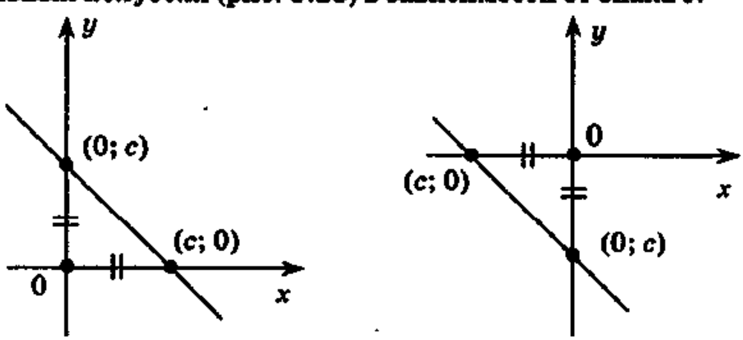
2. Найдите координаты точек пересечения осей координат с прямой, заданной уравнением, и постройте эту прямую в координатной плоскости:

а) $x + y - 7 = 0$;

б) $x - y + 4 = 0$;

в) $x + y - c = 0$.

Решение. а) (0; 7) и (7; 0); б) (0; 4) и (−4; 0); в) $(0; c)$ и $(c; 0)$; эти точки могут располагаться на положительных или на отрицательных полуосях (рис. 8.23) в зависимости от знака c.



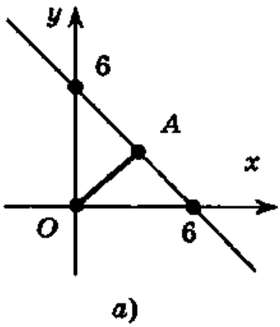
а) б)

Рис. 8.23

3. Чему равно расстояние от начала координат до прямой: а) $x + y - 6 = 0$; б) $x + y + 8 = 0$?

Указание. Вычислив координаты точек пересечения прямой с осями координат и построив эти прямые (рис. 8.24), увидим, что искомое расстояние является высотой, проведенной к гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, а значит, равно половине гипотенузы.

О т в е т. а) $OA = 3\sqrt{2}$; б) $OB = 4\sqrt{2}$.



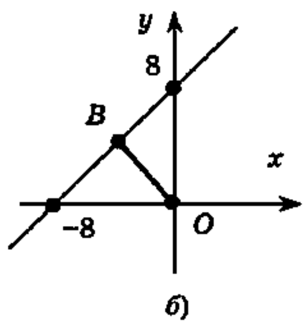


Рис. 8.24

Урок 43

ТЕМА: **Расположение прямой относительно системы координат. Угловой коэффициент в уравнении прямой. График линейной функции**

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Материал пункта 77 не нов для учащихся. В курсе алгебры при изучении темы «Линейное уравнение с двумя переменными» учащиеся строили графики уравнений вида $ax + by + c = 0$ при различных значениях коэффициентов.

Заметим, что в предыдущем пункте уравнение прямой выводилось как уравнение серединного перпендикуляра к некоторому отрезку. Поэтому в уравнении $2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + (a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2) = 0$ коэффициенты при x и y не могут быть одновременно равны нулю (иначе концы отрезка совпали бы). Таким образом, уравнение прямой $ax + by + c = 0$ всегда является уравнением первой степени.

Материал пункта 79 представляет собой обоснование достаточно очевидного для учащихся факта, что может вызвать трудности в понимании и самого доказательства, и его необходимости. Приведенное доказательство направлено на восполнение пробела в логическом обосновании рассматриваемого вопроса в курсе алгебры. Однако сам факт учащимся уже стал привычным, и поскольку уравнение, задающее линейную функцию, является частным случаем уравнения прямой линии, то для учащихся достаточно очевидно, что графиком линейной функции является прямая. Поэтому приведенное в учебнике доказательство можно не рассматривать (либо изучить в ознакомительном плане).

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать частные случаи расположения прямой $ax + by + c = 0$ относительно осей координат, геометрический смысл коэффициента k в уравнении вида $y = kx + l$;

уметь приводить уравнения вида $ax + by + c = 0$ (при $b \neq 0$) к уравнениям вида $y = kx + l$; определять по виду уравнения прямой, проходит ли она через начало координат, параллельна ли оси x или оси y, а также по расположению прямой в координатной плоскости делать выводы о виде ее уравнения.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 15 мин	Расположения прямой $ax + by + c = 0$ относительно осей координат, геометрический смысл коэффициента k в уравнении вида $y = kx + l$

№	Этап урока	Содержание работы
3	Решение задач — 18 мин	Задачи № 37, 43, 44, 46, 49(3)
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 10, 11. Задачи № 45, 47, 49(1)

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

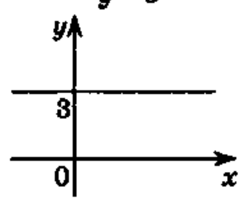
Проверить вопросы 8, 9 (без доказательства), решение задач № 36(2), 39(2), 41. При проверке задач 36, 41 необходимо проверить умение обосновывать составление системы уравнений по условию задачи.

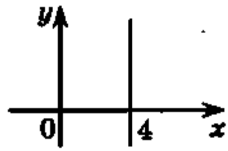
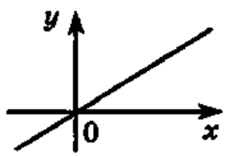
II. Изучение нового материала

1. При рассмотрении каждого частного случая уравнения $ax + by + c = 0$ следует записать этот частный случай в исходном виде и преобразовать его. Например, в случае, когда $a = 0$, $b \neq 0$, имеем $0x + by + c = 0$, $by = -c$, $y = -\frac{c}{b}$. Затем, поскольку все точки прямой в этом случае имеют одну и ту же ординату, делаем вывод о том, что, прямая параллельна оси x.

Результаты всех этих действий и рассуждений полезно оформить в виде таблицы, в левом столбце которой помещаются результаты выполнения заданий на построение прямой, заданной уравнением рассматриваемого вида.

$$ax + by + c = 0$$

1	$a = 0$, $b \neq 0$	$by + c = 0$, $y = -\frac{c}{b}$ или $y = m$ прямая, параллельная оси x	$y = 3$  *Рис. 8.25*

2	$b = 0$, $a \neq 0$	$ax + c = 0$, $x = -\dfrac{c}{a}$ или $x = l$ прямая, параллельная оси y	$x = 4$  *Рис. 8.25*
3	$c = 0$	$ax + by = 0$ прямая, проходящая через начало координат (0; 0)	$2x - 3y = 0$  *Рис. 8.25*

2. При выяснении геометрического смысла углового коэффициента уравнения прямой выполняем следующие выкладки.

1) Пусть прямая m задана уравнением $ax + by + c = 0$, $b \neq 0$, тогда $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ или $y = kx + l$.

2) Пусть даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, где $x_2 > x_1$ (точка A левее точки B). Если $A \in m$ и $B \in m$, то $y_1 = kx_1 + l$ и $y_2 = kx_2 + l$. Вычтем почленно из второго равенства первое: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, тогда $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Т.к. $x_2 - x_1 > 0$, то $k > 0$ при $y_2 > y_1$, $k < 0$ при $y_2 < y_1$.

3) Если $y_2 > y_1$, т.е. точка B выше точки A (рис. 8.28, *а*), то в ΔBAC: $AC = x_2 - x_1$, $BC = y_2 - y_1$, $\angle BAC = \alpha$ (острый угол между прямой и осью x), значит, $\dfrac{BC}{AC} = \text{tg}\,\alpha$, т.е. $k = \text{tg}\,\alpha$.

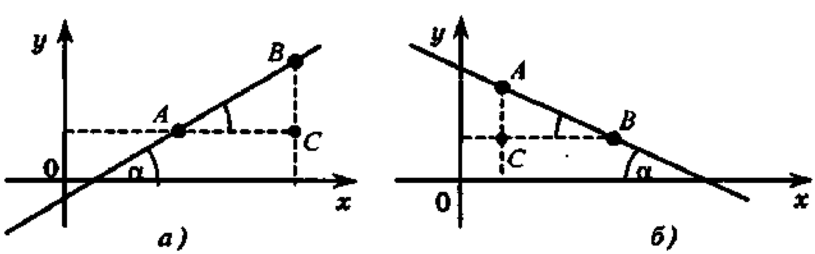


Рис. 8.28

4) Если $y_2 < y_1$, т.е. точка B ниже точки A (рис. 8.28, *б*), то в ΔBAC: $BC = x_2 - x_1$, $AC = y_1 - y_2$, $\angle ABC = \alpha$ (острый угол между прямой и осью x), значит, $\dfrac{BC}{AC} = -\operatorname{tg}\alpha$, т. е. $k = -\operatorname{tg}\alpha$.

3. После проведения этих рассуждений можно подвести итог:

1) коэффициент k с точностью до знака равен тангенсу острого угла, который образует прямая с осью x (тангенс острого угла всегда положителен, а коэффициент k может быть либо равен ему, либо противоположен);

2) из курса алгебры известно, что от модуля коэффициента k зависит величина угла между прямой и осью x.

Поэтому ***коэффициент k называют угловым коэффициентом прямой.***

III. Решение задач

Решить задачу № 37

Решение.

1) Точки O и A лежат на оси y, значит, по стороне OA проходит ось y, ее уравнение $x = 0$.

2) Точки O и B лежат на оси x, значит, по стороне OB проходит ось x, ее уравнение $y = 0$.

3) Пусть уравнение прямой AB имеет вид $y = kx + l$. Тогда координаты точек A и B удовлетворяют этому уравнению: $2 = l$, $0 = -4k + l$, т. е. $k = \dfrac{1}{2}$. Уравнение прямой AB имеет вид $y = \dfrac{1}{2}x + 2$, $2y = x + 4$ или $x - 2y + 4 = 0$.

Решить задачу № 43

Решение.

Предположим, что прямые не параллельны. Тогда они имеют общую точку $M(x_1; y_1)$, координаты которой удовлетворяют обоим уравнениям: $y_1 = kx_1 + l_1$, $y_1 = kx_1 + l_2$. Вычтем почленно из одного равенства другое, получим $0 = l_1 - l_2$, но это противоречит условию $l_1 \neq l_2$, значит, предположение неверно, т.е. прямые параллельны.

Решить задачу № 44

Решение.

Преобразуем данные уравнения: 1) $y = -x + 1$; 2) $y = x - 1$; 3) $y = x - 2$; 4) $y = 4$; 5) $y = 3$; 6) $y = -x - 1{,}5$.

Одинаковые угловые коэффициенты и разные свободные члены имеют уравнения: (1) и (6); (2) и (3); (4) и (5).

Решить задачу № 46

Решение. Все точки прямой, параллельной оси x, имеют одну и ту же ординату, а так как прямая проходит через точку с ординатой 3, то уравнением прямой является уравнение $y = 3$.

Ответ: $y = 3$.

Решить задачу № 49(3)

Решение.

Преобразуем данное уравнение: $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$. Угловой коэффициент $k = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Пусть α — острый угол, который образует с осью x данная прямая, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = 30°$.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 10, 11. Решить задачи № 45, 47, 49(1).

Указания к задачам

45. Все точки прямой, параллельной оси y, имеют одну и ту же абсциссу, а так как прямая проходит через точку с абсциссой 2, то уравнение прямой $x = 2$.

47. Прямая, проходящая через начало координат, имеет уравнение $ax + by = 0$ или $y = kx$. Подставим в уравнение $y = kx$ координаты (2; 3), получим $3 = 2k$. Отсюда $k = 1{,}5$, а уравнение прямой тогда будет иметь вид $y = 1{,}5x$ или $3x - 2y = 0$.

48. Преобразуем данные уравнения к виду $y = kx + l$. Получим 1) $y = -0{,}5x - 1{,}5$, откуда $k = -0{,}5$; 2) $y = -0{,}75x + 3$, $k = -0{,}75$; 3) $y = 1{,}5x + 3$, $k = 1{,}5$; 4) $y = 2x - 5$, $k = 2$.

49(1). Преобразуем данное уравнение: $y = x + 1{,}5$. Угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha = 1$, $\alpha = 45°$.

Дополнительные задачи

1. Запишите уравнения оси абсцисс и оси ординат.

Ответ: $y = 0$, $x = 0$.

2. Составьте уравнение прямой, если она: а) проходит через точку (0; 5) и параллельна оси x; б) параллельна оси y и проходит через точку (4; 0).

Ответ: а) $y = 5$; б) $x = 4$.

3. Определите, чему равен угловой коэффициент прямой и чему равен тангенс острого угла между прямой и осью x, если уравнение прямой: а) $y = 3x + 5$; б) $y = -2x + 3$; в) $2x + 3y + 7 = 0$.

Ответ: а) $k = 3$, $\operatorname{tg} \alpha = 3$; б) $k = -2$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$; в) $k = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.

4. Определите, чему равен свободный член q в уравнении прямой $y = kx + q$, если прямая проходит через точку A (0; 2).

Решение. Подставив координаты точки A в уравнение $y = kx + q$, получим $q = 2$.

Замечание. Этот результат полезно распространить на общий случай: если прямая задана уравнением вида $y = kx + q$, то свободный член q равен ординате точки пересечения прямой с осью y.

5. Запишите уравнение прямой $y = kx + q$, если она пересекает оси координат в точках (0; 4) и (8; 0).

Ответ: $q = 4$, $k = -0{,}5$, $y = -0{,}5x + 4$.

6. Известно, что если точки A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ лежат на прямой $y = kx + q$, то коэффициент k вычисляется по формуле $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Пользуясь этой формулой, запишите уравнение прямой, проходящей через точки A (0; 2) и B (2; 6).

Ответ: $y = 2x + 2$ или $2x - y + 2 = 0$.

7. Прямая $y = kx + q$ образует при пересечении с осью x угол 45° и проходит через точку A (0; 2). Запишите уравнение этой прямой, если известно, что коэффициент k: а) положителен; б) отрицателен.

Ответ: а) $y = x + 2$; б) $y = -x + 2$.

Урок 44

ТЕМА: Пересечение прямой с окружностью

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

В пункте исследуется вопрос о взаимном расположении прямой и окружности в зависимости от соотношения между радиусом R окружности и расстоянием d от центра окружности до прямой. При исследовании используется координатный метод: вводится система координат так, чтобы уравнения рассматриваемых фигур имели бы наиболее простой вид; записываются уравнения прямой и окружности, и вопрос о взаимном расположении прямой и окружности сводится к вопросу о существовании и количестве решений системы этих двух уравнений.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать, при каком условии (на числа R и d) прямая пересекает окружность в двух точках, касается окружности, не имеет с окружностью общих точек;

уметь применять эти знания при решении задач.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 10 мин	Условия, при которых прямая пересекает окружность, касается ее и не имеет с ней общих точек
3	Решение задач — 13 мин	Задачи № 50(1, 4), 32, 27
4	Самостоятельная работа — 10 мин	
5	Домашнее задание — 2 мин	Контрольный вопрос 13. Задачи № 50(2, 3), 51, 34. Повторить вопросы 1 и 9 из § 7

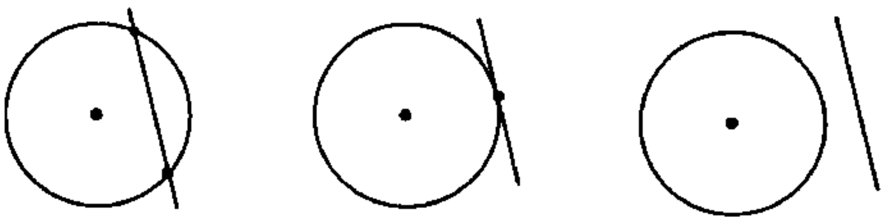
ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 10, 11, решение задач № 47, 49(1). При проверке задачи 49 полезно повторить рассуждение о том, что тангенс острого угла положителен и равен по модулю угловому коэффициенту в уравнении прямой.

II. Изучение нового материала

1. Изложение материала можно начать с иллюстрации известных учащимся из курса геометрии VII класса возможных случаев расположения прямой и окружности на плоскости (рис. 8.29).



а) *б)* *в)*

Рис. 8.29

Полезно уточнить, что слова «пересекаются», «касаются» и «не пересекаются» означают, что окружность и прямая имеют соответственно две общие точки (точки пересечения), одну общую точку (точку касания) или не имеют общих точек.

2. Прежде чем перейти к рассмотрению теоретического материала, целесообразно предложить учащимся задачи с конкретно заданными уравнениями окружности и прямой:

Окружность задана уравнением $x^2 + y^2 = 5^2$. Докажите, что она: а) не имеет общих точек с прямой $x = 7$; б) имеет одну общую точку с прямой $x = 5$; в) имеет две общие точки с прямой $x = 3$;

Любая общая точка прямой и окружности имеет координаты, которые удовлетворяют и уравнению окружности, и уравнению прямой, то есть являются решением системы из двух уравнений с двумя переменными:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x=3. \end{cases}$

И обратно: любое решение системы дает координаты точки, общей для прямой и окружности. Значит, число решений системы равно числу общих точек прямой и окружности.

Во всех трех случаях центром окружности является начало координат, а данная прямая параллельна оси y (рис. 8.30).

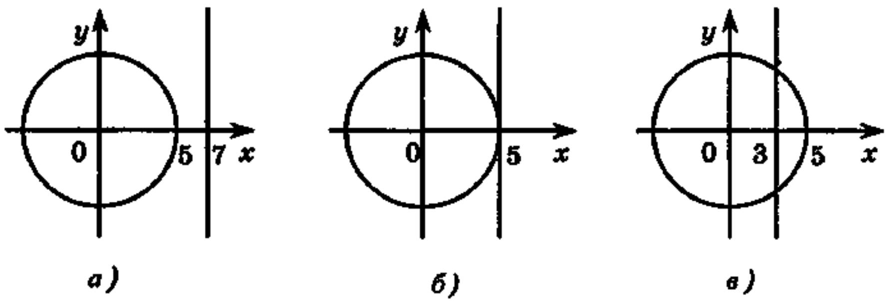


Рис. 8.30

В первом случае (*а*), когда расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса, система не имеет решений и общих точек нет. Во втором случае (*б*) расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, система имеет одно решение и прямая касается окружности. В третьем случае (*в*), когда расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса, система имеет два решения, общих точек две, прямая пересекает окружность.

3. Затем ставится задача в общем виде:

Определите, при каких условиях на числа R (радиус окружности) и d (расстояние от центра окружности до прямой) эти окружность и прямая пересекаются, касаются и не имеют общих точек.

Аналогично решению предыдущей задачи составляем и решаем систему уравнений: $\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ x=d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{R^2-d^2}, \\ x=d. \end{cases}$

Число решений первого уравнения и всей системы зависит от величины $R^2 - d^2 = (R + d)(R - d)$, то есть от знака разности $R - d$ (так как сумма $R + d$ положительна):

$R > d$, $\Rightarrow$ $R^2 - d^2 > 0$, тогда y принимает два значения, т.е. система имеет два решения.

$R = d$, $\Rightarrow$ $R^2 - d^2 = 0$, тогда y принимает одно значение (равное 0), т. е. система имеет одно решение.

$R < d$, $\Rightarrow$ $R^2 - d^2 < 0$, тогда y не существует, а значит, система не имеет решений.

III. Решение задач

При решении задач важно не столько получить результат, выполнив формальные действия, сколько закрепить в сознании учащихся основное рассуждение:

Если окружность и прямая (и вообще любые фигуры в координатной плоскости) имеют общую точку, то координаты этой точки удовлетворяют и уравнению окружности, и уравнению прямой (уравнениям, задающим фигуры), то есть являются решением системы двух уравнений с двумя переменными.

Решить задачу № 50(1, 4).

Решение.

1) $x^2 + (2x + 3)^2 = 1$, $x^2 + 4x^2 + 12x + 9 = 1$, $5x^2 + 12x + 8 = 0$. $D = 12^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8 = 144 - 160 < 0$, значит, уравнение не имеет решений, окружность и прямая не имеют общих точек.

2) $x^2 + (kx + 1)^2 = 1$, $x^2 + k^2x^2 + 2kx + 1 = 1$, $(k^2 + 1)x^2 + 2kx = 0$, $x((k^2 + 1)x + 2k) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{2k}{k^2 + 1}$.

По найденным абсциссам точек пересечения вычислим ординаты этих точек (подставив значение абсциссы в данное уравнение прямой): $y_1 = 1$, $y_2 = k\left(-\dfrac{2k}{k^2 + 1}\right) + 1 = \dfrac{-k^2 + 1}{k^2 + 1}$. Точки пересечения: $(0; 1)$ и $\left(\dfrac{-2k}{k^2 + 1}; \dfrac{1 - k^2}{k^2 + 1}\right)$.

Решить задачу

Пересекаются ли ось абсцисс и окружность с центром в точке С (3; 5) и радиусом: а) $R = 1$; б) $R = 5$; в) $R = 8$?

Решение.

Расстояние от центра окружности до оси абсцисс равно ординате центра: $d = 5$. Тогда имеем:

а) $R < d \Rightarrow$ окружность и ось x не имеют общих точек;

б) $R = d \Rightarrow$ окружность и ось x касаются;

в) $R > d \Rightarrow$ окружность и ось x пересекаются в двух точках.

Решить задачу № 32.

Решение.

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0, \\ y = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 7 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ по теореме Виета имеем $x_1 = 1$, $x_2 = 7$, значит, точки пересечения имеют координаты (1; 0) и (7; 0).

Замечание. Приведенное решение не использует того, что дано уравнение именно окружности, однако полезно показать учащимся, что, выполнив преобразования, мы можем убедиться, что задано действительно уравнение окружности: $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = (x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 8y + 16) - 32 + 7 = (x - 4)^2 + (y - 4)^2 - 25$, тогда уравнение имеет вид $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 25$, т.е. задана окружность с центром (4; 4) и радиусом 5. Расстояние от центра окружности до оси x равно ординате центра: $d = 4$. Т.к. $R > d$, то окружность и ось x пересекаются в двух точках.

Решить задачу № 27

Решение.

1) Так как центр окружности лежит на оси x, то его координаты равны (a; 0), радиус окружности равен 5. Тогда уравнение окружности имеет вид $(x - a)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$, или $(x - a)^2 + y^2 = 25$.

2) Так как точка (1; 4) принадлежит этой окружности, то ее координаты удовлетворяют уравнению окружности $(1 - a)^2 + 4^2 = 25$, $a^2 - 2a + 1 + 16 = 25$, $a^2 - 2a - 8 = 0$, по теореме Виета $a = 4$, или $a = -2$.

Ответ: (4; 0) и (−2; 0).

IV. Самостоятельная работа

1-й вариант

1. Найдите точку пересечения оси x с прямой, заданной уравнением $3x - 5y + 15 = 0$.

Ответ: $(-5; 0)$.

2. Составьте уравнение окружности с центром в точке $(4; -1)$ и радиусом, равным 7.

Ответ: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 49$.

3. Найдите коэффициент a в уравнении прямой $ax + 2y + 3 = 0$, если она проходит через точку $(-5; 1)$.

Решение. $a\cdot(-5) + 2 \cdot 1 + 3 = 0$, откуда $5a = 5$, $a = 1$.

Ответ: 1.

2-й вариант

1. Найдите точку пересечения оси y с прямой, заданной уравнением $7x - 2y + 14 = 0$.

Ответ: $(0; 7)$.

2. Составьте уравнение окружности с центром в точке $(-2; 7)$ и радиусом, равным 4.

Ответ: $(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 16$.

3. Найдите коэффициент b в уравнении прямой $4x + by - 1 = 0$, если она проходит через точку $(1; -3)$.

Решение. $4 \cdot 1 + b \cdot (-3) - 1 = 0$, откуда $3b = 3$, $b = 1$.

Ответ: 1.

V. Домашнее задание

Ответить на контрольный вопрос 13. Решить задачи № 50(2, 3), 51, 34. Повторить вопросы 1 и 9 из § 7.

Указания к задачам

34. *1-й способ.* Данные окружность и прямая имеют столько общих точек, сколько решений имеет система

$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax = 0, \\ x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 0, \\ x = 0; \end{cases}$ т.к. решение только одно $(0; 0)$, то окружность касается прямой.

2-й способ. Преобразуем уравнение окружности: $(x^2 + 2ax + a^2) + y^2 - a^2 = 0$, $(x + a)^2 + y^2 = a^2$. Расстояние d от центра $(-a; 0)$ до оси y равно $|a|$ и $R = |a|$. Т.к. $R = d$, то окружность касается оси.

50 2) $x^2 + (x + 1)^2 = 1$, $x^2 + x^2 + 2x + 1 = 1$, $2x^2 + 2x = 0$, $2x(x + 1) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, тогда $y_1 = 1$, $y_2 = 0$. Точки пересечения (0; 1) и (−1; 0).

3) $x^2 + (3x + 1)^2 = 1$, $x^2 + 9x^2 + 6x + 1 = 1$, $10x^2 + 6x = 0$, $2x(5x + 3) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}6$, тогда $y_1 = 1$, $y_2 = -0{,}8$. Точки пересечения (0; 1) и (−0,6; −0,8).

51. Подставив вместо y выражение $-x - c$ в уравнение $x^2 + y^2 = 1$, получим $x^2 + x^2 + 2cx + c^2 = 1$, $2x^2 + 2cx + c^2 - 1 = 0$. Это квадратное уравнение, его дискриминант равен $4c^2 - 8(c^2 - 1) = -4c^2 + 8$. Уравнение (а значит, и система уравнений) имеет два решения при условии $-4c^2 + 8 > 0$, одно решение при условии $-4c^2 + 8 = 0$, не имеет решений при условии $-4c^2 + 8 < 0$. Таким образом, эти прямая и окружность пересекаются при $c^2 < 2$, то есть при $-\sqrt{2} < c < \sqrt{2}$; касаются при $c^2 = 2$, то есть при $c = \pm\sqrt{2}$; не пересекаются при $c^2 > 2$, то есть при $c > \sqrt{2}$ или при $c < -\sqrt{2}$.

Дополнительные задачи

1. Докажите, что окружность $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$: а) касается оси y; б) пересекается с осью x; в) не пересекается с прямой $y = -9$.

2. Составьте уравнение окружности с центром в точке (− 2; − 3), касающейся оси y.

Ответ: $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$.

3. Докажите, что окружность $x^2 + y^2 = 2$ касается прямой $x + y + 2 = 0$.

4. При каком условии окружность $x^2 + y^2 = 9$ касается прямой $y + c = 0$?

Ответ: при $c = \pm 3$.

5. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне a и высоте h к основанию. При каких a и h задача имеет решение?

Ответ: Задача имеет решение, если расстояние h меньше радиуса окружности a.

Урок 45

ТЕМА: **Определение синуса, косинуса и тангенса для любого угла от 0 до 180°**

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Рассматриваемый материал дает еще один пример применения координатного метода, в частности для определения значений тригонометрических функций углов. Этот материал имеет процедевтический характер, его усвоение не предусматривается итоговыми обязательными требованиями к математической подготовке учащихся основной школы. Так что указанные ниже требования к усвоению материала являются текущими требованиями и не подвергаются обязательной проверке даже в ходе тематического контроля.

Следует отметить, что в решении некоторых задач приходится применять основное тригонометрическое тождество ($\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$), которое было доказано в предыдущем параграфе для острых углов. С точки зрения корректности применения этого тождества для любых углов надо было бы доказать его справедливость для любых углов от 0 до 180°. В сильном классе можно обратить внимание учащихся на этот факт. При желании можно показать, как оно доказывается для тупых углов. В этом случае нужно от синуса и косинуса тупого угла α перейти к синусу и косинусу острого угла $\beta = 180° - \alpha$, тогда будут выполняться равенства: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin(180° - \alpha))^2 + (-\cos(180° - \alpha))^2 = \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$. Можно, не доказывая это тождество в общем виде, применять аналогичный прием (переход от тупого угла к острому, дополняющему рассматриваемый тупой угол до 180°) в ходе решения задач для конкретных заданных условиями углов.

В более слабом классе можно использовать тождество без дополнительных комментариев.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определения синуса, косинуса, тангенса для любого угла от 0 до 180°;

уметь находить значения синуса, косинуса, тангенса любых углов, используя определения.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Анализ выполнения самостоятельной работы — 4 мин	
3	Изучение нового материала — 13 мин	Определения синуса, косинуса и тангенса угла от $0°$ до $180°$. Значения синуса, косинуса и тангенса углов $0°$, $90°$, $120°$, $135°$, $150°$, $180°$. Формулы приведения для углов $(180° - \alpha)$
4	Решение задач — 16 мин	Задачи № 52(3), 53(1), 56(2), 57(2)
5	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 14, 15 (без доказательства). Задачи № 52(1, 2), 57(1, 3), 60

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопрос 13, решение задач № 50(2, 3), 51, 34. При проверке задачи 34 полезно обсудить два способа решения (см. указания к решению задачи).

II. Анализ результатов выполнения самостоятельной работы

Необходимо проанализировать ошибки, которые допускали учащиеся при решении задач самостоятельной работы.

III. Изучение нового материала

1. Перед изучением нового материала следует устно повторить с учащимися определения косинуса, синуса, тангенса острого угла прямоугольного треугольника.

Затем, выполняя рис. 8.31, дасм следующие комментарии.

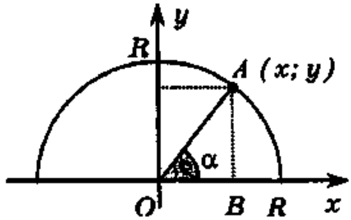


Рис. 8.31

1) Проведем в верхней полуплоскости координатной плоскости полуокружность с центром в начале координат радиусом R.

2) Отложим от положительной полуоси в верхнюю полуплоскость острый угол α. Его сторона пересечет окружность в точке A.

3) ΔAOB — прямоугольный, $OB = x$, $AB = y$, $OA = R$. Тогда $\sin\alpha = \frac{y}{R}$, $\cos\alpha = \frac{x}{R}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$.

4) Введем определения синуса, косинуса и тангенса любого угла, используя те же формулы:

Для произвольного угла α, отложенного от положительного луча Ox, $\sin\alpha = \frac{y}{R}$, $\cos\alpha = \frac{x}{R}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, где x и y — координаты точки на второй стороне угла, R — расстояние от этой точки до начала координат.

Необходимо обратить внимание учащихся на то, что $\operatorname{tg}\alpha$ для $\alpha = 90°$ не существует, т.к. в этом случае точка A имеет абсциссу, равную 0.

2. Для того чтобы разъяснить смысл введенных определений, рассматриваем пример, изображенный на рис. 8.32: если точка B имеет координаты (−4; 3), то по теореме Пифагора $R = 5$, тогда $\sin\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{-4}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{-4}$.

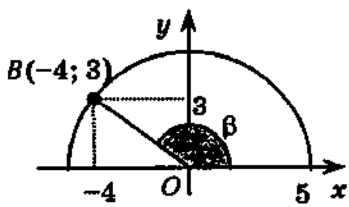


Рис. 8.32

3. Полезно показать учащимся, что часто бывает выгодно рассматривать точки на полуокружности, радиус которой равен единице. В этом случае формулы для косинуса и синуса угла между лучом OA и положительной полуосью Ox становятся проще: $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$. Полезно также заметить, что точка, лежащая на полуокружности единичного радиуса (рис. 8.33), имеет координаты $(\cos\alpha; \sin\alpha)$.

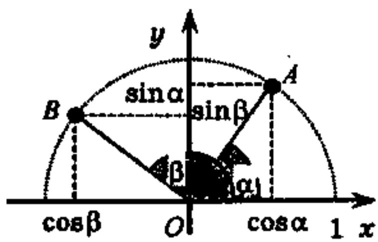


Рис. 8.33

4. Используя единичную полуокружность, находим значения тригонометрических функций углов 0°, 90° и 180°.

1) Определим координаты точек A, B и C, т.к. они соответствуют углам 0°, 90° и 180° (рис. 8.34).

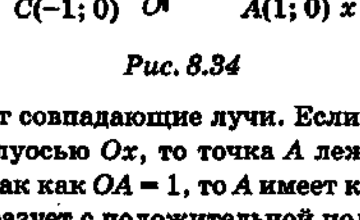


Рис. 8.34

Угол 0° образуют совпадающие лучи. Если луч OA совпадает с положительной полуосью Ox, то точка A лежит на положительной полуоси Ox, а так как $OA = 1$, то A имеет координаты (1; 0).

Если луч OB образует с положительной полуосью Ox угол 90°, то точка B лежит на положительной полуоси Oy и имеет координаты (0, 1).

Если луч OC образует с положительной полуосью Ox угол, равный 180°, то точка C лежит на отрицательной полуоси Ox и имеет координаты (−1; 0).

2) По определению имеем:

$\sin 0° = \dfrac{0}{1} = 0$, $\cos 0° = \dfrac{1}{1} = 1$, $\operatorname{tg} 0° = \dfrac{0}{1} = 0$;

$\sin 90° = \dfrac{1}{1} = 1$, $\cos 90° = \dfrac{0}{1} = 0$, $\operatorname{tg} 90°$ не существует;

$\sin 180° = \dfrac{0}{1} = 0$, $\cos 180° = \dfrac{-1}{1} = -1$, $\operatorname{tg} 180° = \dfrac{0}{-1} = 0$.

5. Доказательство формул приведения, данное в учебнике, лучше проводить не по готовому рисунку, а постепенно выполняя на доске построения, по ходу рассуждений (рис. 8.35). Учащиеся могут не делать записей в тетрадях. На доске выполняются лишь краткие записи.

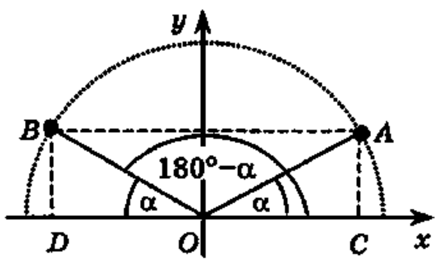


Рис. 8.35

1) В координатной плоскости изобразим полуокружность с центром в начале координат и радиусом R.

2) На окружности отметим точки $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ такие, что $\angle AOC = \alpha$, $\angle BOC = 180° - \alpha$.

3) По определению имеем: $\sin\alpha = \dfrac{y_1}{R}$, $\cos\alpha = \dfrac{x_1}{R}$, $\sin(180° - \alpha) = \dfrac{y_2}{R}$, $\cos(180° - \alpha) = \dfrac{x_2}{R}$.

4) Из точек A и B опустим перпендикуляры к осям. Рассмотрим ΔAOC и BOD. $AO = BO$, $\angle BOD = \alpha$ (т.к. он смежный с углом, равным $180° - \alpha$), значит, $\angle BOD = \angle AOC$. $\Delta BOD = \Delta AOC$ по гипотенузе и острому углу.

5) Т.к. $OD = OC$, то $x_2 = -x_1$, а т.к. $BD = AC$, то $y_2 = y_1$, тогда имеем: $\sin(180° - \alpha) = \dfrac{y_2}{R} = \dfrac{y_1}{R}$ $\sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = \dfrac{x_2}{R} = -\dfrac{x_1}{R} = -\cos\alpha$.

6) $\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = \dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{y_1}{-x_1} = -\mathrm{tg}\alpha$.

Замечание. Полезно обратить внимание учащихся на то, что доказанные формулы позволяют вычислять синус, косинус и тангенс угла α, если известны синус, косинус и тангенс угла, дополняющего α до 180°. Например, можно находить косинус тупого угла по косинусу смежного с ним острого угла. Для закрепления можно разобрать с учащимися решение задач 52 и 53.

IV. Решение задач

Решить задачу № 52(3)

Решение.

1) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$;

2) $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\mathrm{tg}\,150^\circ = \mathrm{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\mathrm{tg}\,30^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Замечание. Полезно проиллюстрировать полученное решение с помощью рис. 8.36.

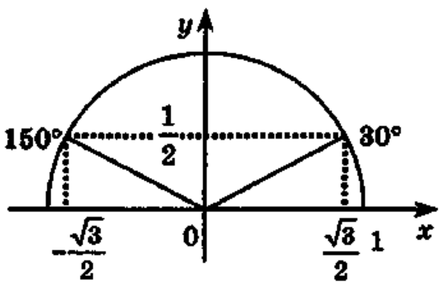


Рис. 8.36

Решить задачу № 53(1)

Решение. $\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ \approx 0{,}342$.

Задачи № 56 и 57 можно решать двумя способами. Первый связан с применение основного тригонометрического тождества, второй — с построением угла в координатной плоскости. Рассмотрим первый способ для решения задачи № 56, а второй — для задачи № 57.

Решить задачу № 56(2)

Решение.

1) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 = \frac{3}{4}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}$.

Решить задачу № 57(2)

Решение.

1) Пусть тупой угол α (т.к. $90° < \alpha < 180°$) отложен в верхнюю полуплоскость от положительной полуоси x и его сторона пересекает в точке A единичную полуокружность (рис. 8.37).

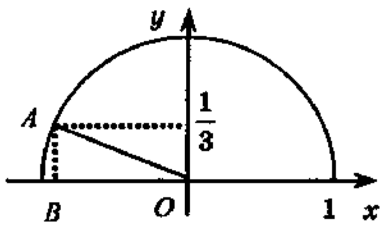


Рис. 8.37

2) В ΔAOC $\angle B = 90°$, $AO = 1$, $AB = \frac{1}{3}$, по теореме Пифагора $OB = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, т. е. абсцисса точки A равна $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

3) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} : \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

V. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 14, 15 (без доказательства). Решить задачи № 52(1, 2), 57(1, 3), 60.

Указания к задачам

52. Используя формулы приведения, имеем:

1) $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$.

2) $\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(180° - 45°) = -\operatorname{tg} 45° = -1$.

57. 1) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$. Т.к. α — острый угол, то $\cos\alpha = 0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

3) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Если α — острый угол, то $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} : \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1$; если α — тупой угол, то $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} : \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -1$.

58. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \dfrac{25}{144} = \dfrac{169}{144}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{144}{169}$.

Т.к. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0$, $\sin\alpha > 0$, то $\cos\alpha < 0$, $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$. Тогда $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{5}{13}$.

60. Построим в верхней полуплоскости полуокружность единичного радиуса с центром в начале координат. На оси абсцисс отметим точку $-\dfrac{3}{5}$ и проведем из нее перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с полуокружностью в точке A. Угол AOx — искомый.

Замечание. При построениях в тетради удобно в качестве единицы выбрать отрезок длиной в пять точек. При таком масштабе легче построить отрезок длиной $\dfrac{3}{5}$.

61. 1) Если $\cos\alpha = \cos\beta > 0$, то α и β — оба острые углы. Предположим, что $\alpha \neq \beta$, тогда один из них больше другого. Больший из двух острых углов имеет меньший косинус, но по условию $\cos\alpha = \cos\beta$, значит, предположение о том, что $\alpha \neq \beta$, неверно. Таким образом, $\alpha = \beta$.

2) Если $\cos\alpha = \cos\beta < 0$, то α и β — оба тупые углы. Тогда $\alpha_1 = 180° - \alpha$ и $\beta_1 = 180° - \beta$ — острые углы, причем $\cos\alpha_1 = -\cos\alpha$ и $\cos\beta_1 = -\cos\beta$, значит, $\cos\alpha_1 = \cos\beta_1$, то есть по доказанному в первой части $\alpha_1 = \beta_1$. Но тогда $\alpha = \beta$.

62. Углы α и β могут быть: а) оба острые; б) оба тупые; в) один из углов острый, другой тупой.

а) α и β – острые углы. Методом от противного, как в задаче 61 (п.1), доказываем, что $\alpha = \beta$ (используется то, что с возрастанием острого угла синус угла возрастает).

б) α и β — тупые углы. Введем углы $\alpha_1 = 180° - \alpha$ и $\beta_1 = 180° - \beta$. Тогда $\alpha_1 = \beta_1$ — острые углы, причем $\sin\alpha_1 = \sin\alpha = \sin\beta = \sin\beta_1$. Отсюда $\alpha_1 = \beta_1$. Но тогда и $\alpha = \beta$.

в) Один из углов α и β острый, другой — тупой. Пусть, например, α — острый угол, а β — тупой. Введем угол $\beta_1 = 180° - \beta$, тогда β_1 — острый угол и $\sin\beta_1 = \sin\alpha$. Отсюда по доказанному в первой части $\alpha = \beta_1$, т.е. $\alpha = 180° - \beta$.

Аналогично, если β — острый угол, а α — тупой, то получаем тот же результат: $\beta = (180° - \alpha)$ (или $\alpha = 180° - \beta$).

Дополнительные задачи

1. Дано: $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\gamma = -3$.

Вычислите: $\sin(180° - \alpha) \cdot \cos(180° - \beta) + \operatorname{ctg}(180° - \gamma)$.

О т в е т: $\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

2. Углы α и β — смежные, $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$. а) Какой из углов α и β острый, какой тупой? б) Найдите $\cos\beta$.

О т в е т: а) α — тупой угол, так как $\cos\alpha < 0$; β — острый, так как он дополняет α до $180°$; б) $\cos\beta = \frac{1}{4}$.

3. *Угол α образован положительной полуосью x и лучом OA, проходящим через точку A (– 2; 4). Найдите: а) sin α, cos α, tg α; б) синус, косинус и тангенс угла β, смежного с углом α.*

Ответ: Т.к. $OA = \sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, то а) $\sin\alpha = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{-2}{2\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{-2}=-2$; б) $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\beta = 2$.

Урок 46

ТЕМА: Решение задач

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

уметь решать задачи с использованием знаний о координатах в плоскости.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 8 мин	
2	Решение задач — 20 мин.	Задачи № 55(1, 2), 59, 20, 33, 36(3)
3	Самостоятельная работа — 10 мин	
4	Домашнее задание — 2 мин	Задачи № 12(3), 13(2), дополнительная задача 1

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 14, 15 (без доказательства), решение задач № 52(1, 2), 57(1, 3), 60.

После проверки результатов решения задачи № 52 можно подвести итог вычислений значений синусов и косинусов углов 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, выполнив рис. 8.38. С помощью этого рисунка еще раз иллюстрируются рассмотренные формулы приведения.

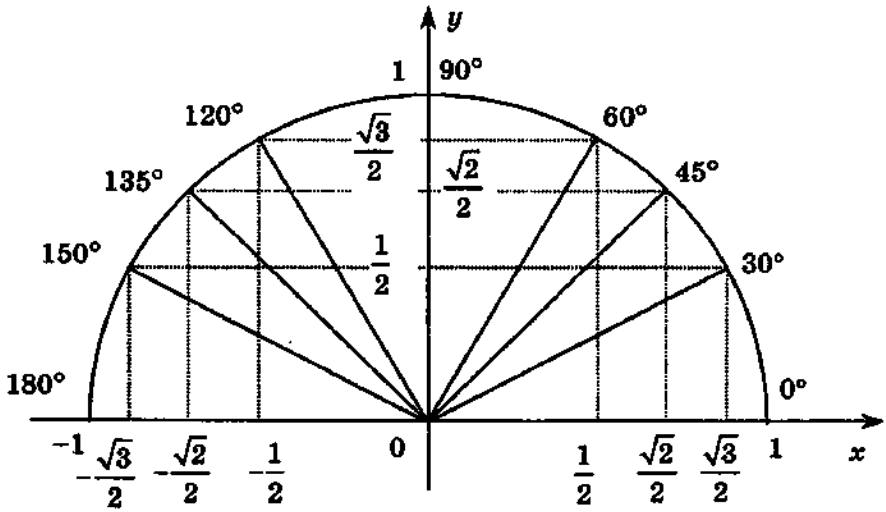


Рис. 8.38

II. Решение задач

Решить задачу № 55(1, 2)

Р е ш е н и е

1) Так как синус любого угла от 0 до 180° положителен, то α может быть как острым, так и тупым углом, причем $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$, тогда $\alpha_1 = 11°32'$, $\alpha_2 = 168°28'$.

2) Так как $\cos\alpha$ отрицателен, то α — тупой угол, причем $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = 0{,}7$, тогда $180° - \alpha = 45°34'$, $\alpha = 134°26'$.

Решить задачу № 59

Р е ш е н и е (рис. 8.39).

1) Построим в верхней полуплоскости полуокружность единичного радиуса с центром в $O(0; 0)$.

2) Отметим точку $M(0; \frac{3}{5})$.

3) Проведем через точку M прямую, параллельную оси абсцисс до пересечения с полуокружностью в точках A и B.

4) $\angle AOx$ и $\angle BOx$ — искомые, т.к. $\sin \angle AOx = \sin \angle BOx = \frac{3}{5}$.

Замечание. При построениях в тетради удобно в качестве единицы выбрать отрезок длиной в 5 клеточек. При таком масштабе легче построить отрезок длиной $\frac{3}{5}$.

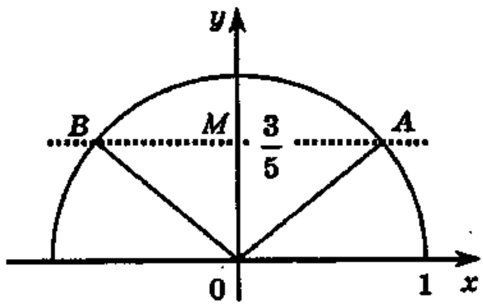


Рис. 8.39

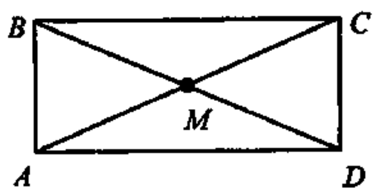


Рис. 8.40

Решить задачу

Р е ш е н и е (рис. 8.40).

1) $M(x; y)$: $x = \frac{-5+3}{2} = -1$, $y = \frac{4-2}{2} = 1$, $M(-1; 1)$.

2) $BD = AC$ (как диагонали прямоугольника), тогда $BD = \sqrt{(3+5)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$.

3) Т.к. $MA = MB = MC = MD$, то M — центр описанной окружности, $R = MB = 10 : 2 = 5$; уравнение окружности: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

Решить задачу № 20

Решение

1) Пусть $M(3, 6)$ — данная точка, $A(x, y)$ — искомая точка, d_1 — расстояние от нее до оси y, d_2 — расстояние до оси x. Тогда $d_1^2 = x^2$, $d_2^2 = y^2$, $AM^2 = (x-3)^2 + (y-6)^2$.

2) По условию $d_1 = d_2 = AM$, т.е. $x^2 = y^2 = (x-3)^2 + (y-6)^2$.

3) Равенство $x^2 = y^2$ возможно в двух случаях: если $x = y$ или если $x = -y$.

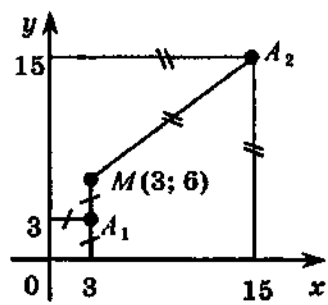


Рис. 8.41

Если $x = y$, то $x^2 = (x-3)^2 + (x-6)^2$, $x^2 - 18x + 45 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 15$, т. е. точка A имеет координаты (3; 3) или (15; 15).

Если $x = -y$, то $x^2 = (x-3)^2 + (-x-6)^2$, $x^2 + 6x + 45 = 0$.

Поскольку это уравнение корней не имеет, то других точек, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

Ответ: $A_1(3; 3)$, $A_2(15; 15)$ (рис. 8.41).

Решить задачу № 33

Решение.

1) Если ось y и окружность имеют общую точку M, то координаты (0; y) этой точки удовлетворяют уравнению окружности: $0^2 + y^2 + 2a \cdot 0 + 1 = 0$, $y^2 + 1 = 0$.

2) Т.к. это уравнение не имеет решений, то окружность не имеет с осью y ни одной общей точки.

Решить задачу № 36(3)

Решение

1) Точки A и B имеют разные абсциссы, значит, прямая AB не параллельна оси y. Тогда уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$.

2) Координаты точек A и B удовлетворяют этому уравнению, т.е. $-3 = 5k + b$ и $-2 = -k + b$. Значит, $-3 - 5k = b$ и $-2 + k = b$, откуда $-3 - 5k = -2 + k$, $-1 = 6k$, $k = -\dfrac{1}{6}$. Тогда $b = -2 - \dfrac{1}{6} = -\dfrac{13}{6}$.

3) Уравнение прямой: $y = -\dfrac{1}{6}x - \dfrac{13}{6}$ или $6y = -x - 13$, $x + 6y + 13 = 0$.

III. Домашнее задание

Решить задачи № 12(3), 13(2), дополнительную задачу 1.

Указания к задачам

12(3). Координаты середины отрезка равны: $x = \dfrac{5-3}{2} = 1$, $y = \dfrac{7-5}{2} = 1$.

13(2). Пусть точка B имеет координаты $(x;\ y)$. Так как C — середина AB, то $1 = \dfrac{-1+x}{2}$, $-1 = \dfrac{3+y}{2}$, откуда $x = 2 + 1 = 3$, $y = -2 - 3 = -5$, $B\,(3;\ -5)$.

Дополнительные задачи

1. AM — медиана треугольника ABC. Найдите координаты точки M, длину медианы AM и составьте уравнение окружности, для которой сторона BC является диаметром, если даны точки $A\,(-2; -2)$, $B\,(1; 10)$ и $C\,(7; 2)$.

Ответ: $M(4;\ 6)$, $AM = 10$, уравнение окружности: $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25$.

2. Дана прямая $4x + 3y - 34 = 0$.

1) Докажите, что точки $A\,(-2;\ 14)$ и $B\,(16;\ -10)$ лежат на этой прямой.

2) Вычислите длину отрезка AB.

3) Найдите координаты точки C — середины отрезка AB.

4) Составьте уравнение окружности с центром в точке A и радиусом, равным 3.

Ответ: $AB = 30$, $C\,(7;\ 2)$, уравнение окружности: $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 225$.

3. Дана окружность радиуса 3 с центром в точке $C\,(8;\ 0)$. Запишите уравнение: а) данной окружности; б) окружности с тем же центром, но с радиусом в 2 раза большим, чем у данной; в) окружности с тем же центром, но проходящей через точку $M(0;\ 3)$.

Решение.

а) $(x-8)^2 + y^2 = 9$;

б) $(x-8)^2 + y^2 = 36$;

в) $R = CM = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$, уравнение окружности: $(x-8)^2 + y^2 = 73$.

4. Две окружности имеют общий центр в точке $(-2, -5)$ и радиусы, равные 2 и 5. Запишите уравнения окружностей, изобразите их в координатной плоскости.

Решение (рис. 8.42).

$(x+2)^2 + (y+5)^2 = 4$; $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 25$.

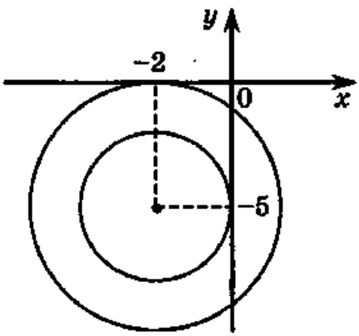


Рис. 8.42

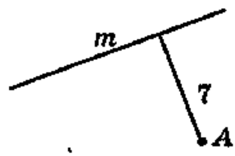


Рис. 8.43

5. Расстояние от точки A до прямой m равно 7 см (рис. 8.43). Как расположена прямая m относительно окружности с центром в точке A и радиусом: а) 9 см; б) 4 см; в) 7 см?

Ответ: а) пересекает, б) не имеет общих точек, в) касается.

6. Прямая a параллельна оси x и проходит через точку A (0; 4). Каково взаимное расположение этой прямой и окружности с центром M на оси x (рис. 8.44) и радиусом: а) 4; б) 6; в) 2?

Ответ: а) касается, б) пересекает, в) не меет общих точек.

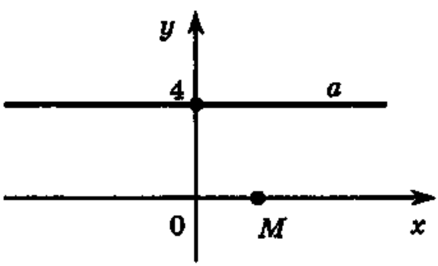


Рис. 8.44

Урок 47

ТЕМА: Контрольная работа № 5

1-й вариант

1*. Точки A (– 4; 1) и B (4; 7) являются концами диаметра окружности. Найдите диаметр окружности и координаты ее центра. Запишите уравнение окружности.

О т в е т: $AB = \sqrt{(4+4)^2+(7-1)^2}=10$; C (0; 4); $x^2+(y-4)^2=25$.

2. Точки A (–2; 4), B (–6; 12) и C (2; 8) являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки D.

О т в е т: D (6; 0).

2-й вариант

1*. Точки A (– 4; 7) и B (2; –1) являются концами диаметра окружности. Найдите диаметр окружности и координаты ее центра. Запишите уравнение окружности.

О т в е т: $AB = \sqrt{(2+4)^2+(-1-7)^2}=10$; $C(-1;\ 3)$; $(x+1)^2 + (y-3)^2=25$.

2. Точки A (–3; 5), C (7; –1) и D (5; 7) являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки B.

О т в е т: $B(-1; -3)$.

§ 9. Движение

В параграфе изучаются преобразования движения. В отличие от курсов геометрии, в которых понятие движения положено в их основу, в данном курсе понятие движения является одним из объектов изучения. Для построения теории понятие движения важно прежде всего тем, что, опираясь на него, можно ввести общее понятие равенства геометрических фигур: «Фигуры F и F' называются равными, если они движением переводятся одна в другую». С точки зрения практических умений знакомство с конкретными видами движений и умение применять свойства движений позволяют использовать дополнительные возможности решения ряда геометрических задач.

Основная цель изучения темы — познакомить учащихся с примерами преобразований геометрических фигур. Поскольку в дальнейшем движения не применяются в качестве аппарата для решения задач и изложения теории, можно рекомендовать изучение материала в ознакомительном порядке, т.е. не требовать от учащихся воспроизведения доказательств (а в некоторых случаях и не рассматривать доказательство теоремы). Основные виды движений — симметрия относительно прямой и точки, параллельный перенос — учащиеся должны усвоить на уровне практических применений.

В результате изучения материала параграфа учащиеся должны:

знать определение движения, его свойства; определения точек и фигур, симметричных относительно данной точки, симметричных относительно прямой; определение поворота, формулы, задающие параллельный перенос и геометрические свойства параллельного переноса; определение равных фигур, понимать, что два определения равных треугольников равносильны;

уметь применять свойства движений для распознавания фигур, в которые переходят данные фигуры (параллелограмм, прямоугольник и т.п.) при движении, строить точки и простейшие фигуры, симметричные данным относительно данной точки и данной прямой, приводить примеры фигур, имеющих центр

симметрии или ось симметрии, применять свойства движения в решении задач на симметрию фигур; строить образы простейших фигур при повороте и параллельном переносе; выявлять сонаправленные и противоположно направленные лучи в рассматриваемых конфигурациях.

Урок 49

ТЕМА: Преобразования фигур. Свойства движения

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

1. В пункте 82 вводится понятие преобразования фигур. Это понятие не требует какой-либо отработки, достаточно того, чтобы у учащихся было представление об этом понятии. В отличие от этого понятие движения должно быть усвоено и на уровне формального определения, и на уровне осознанного применения этого определения. Вместе с тем следует иметь в виду, что знания о движениях формируются не только при изучении данного пункта, но и при изучении конкретных примеров движений.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение движения, его свойства;

уметь применять свойства движений для распознавания фигур, в которые переходят данные фигуры (параллелограмм, прямоугольник и т.п.) при движении.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Анализ контрольной работы — 8 мин	

№	Этап урока	Содержание работы
2	Изучение нового материала — 12 мин	Понятие преобразования фигур, определение движения, свойства движения
3	Решение задач — 18 мин	Дидактические задачи на свойства движения
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 1–4 (без доказательства). Задачи № 1, 2

ХОД УРОКА

I. Анализ контрольной работы

Задачи контрольной работы, которые вызвали затруднения у учащихся, необходимо решить, отметив наиболее часто встречавшиеся ошибки в решении.

II. Изучение нового материала

1. Для введения понятия преобразования фигур можно использовать рис. 9.1. При этом даем пояснения:

Если каждая точка фигуры F переходит в некоторую точку, то получается новая фигура F_1. При этом говорят, что фигура F_1 получена преобразованием фигуры F.

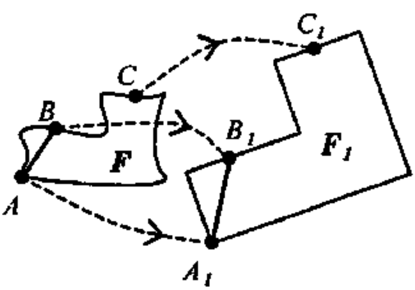


Рис. 9.1

2. Определение движения иллюстрируется рисунком 9.2.

Преобразование одной фигуры в другую называется движением, если оно сохраняет расстояния между точками.

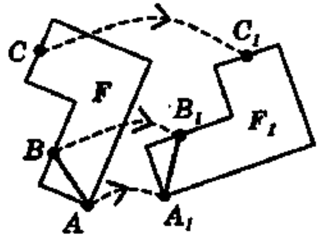


Рис. 9.2

Это означает, что если при данном преобразовании произвольные две точки A и B переходят в точки A_1 и B_1, то $AB = A_1B_1$ (расстояние AB равно расстоянию A_1B_1).

Учащимся предлагается вопрос:

Является ли преобразование на рисунке 9.1 движением?

О т в е т: нет, т.к. $AB \neq A_1B_1$.

Замечание. Для того чтобы утверждать, что при данном преобразовании не сохраняются расстояния, можно было бы рассмотреть другие расстояния между точками, для которых указано, в какие точки они переходят при этом преобразовании, например расстояние BC или AC. Однако достаточно только одного примера, показывающего, что условие, данное в определении, не выполняется.

3. Рассматриваем свойство движения:

Два движения, выполненные последовательно, дают снова движение.

Его обоснование целесообразно разделить на два этапа. Сначала следует пояснить учащимся смысл слов «последовательное выполнение двух движений». Выполняя рис. 9.3, объясняем, что если при некотором движении $F \to F_1$ (фигура F переходит в фигуру F_1), а при другом движении $F_1 \to F_2$, то получается, что в результате этих двух последовательно выполненных движений фигура F переводится в фигуру F_2 некоторым преобразованием.

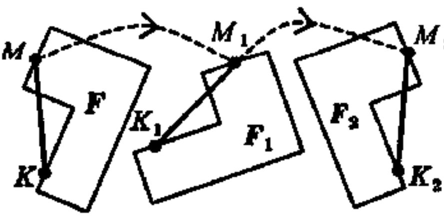


Рис. 9.3

Второй шаг заключается в обосновании того, что это преобразование является движением. Действительно, если $M \to M_1$, $M_1 \to M_2$ и $K \to K_1$, $K_1 \to K_2$ (рис. 9.3), то $MK = M_1K_1$ и $M_1K_1 = M_2K_2$, т.е. $MK = M_2K_2$. Значит, преобразование, переводящее фигуру F в фигуру F_2, сохраняет расстояние, то есть является движением.

4. Усвоение понятия обратного преобразования и доказательство того, что преобразование, обратное движению, также является движением, вопросами для повторения не предусматривается, а само понятие при решении задач не используется. Поэтому можно рассмотреть его с учащимися в ознакомительном порядке. Для этого, обратившись еще раз к рисунку 9.2, нужно напомнить, что рассматривалось преобразование, которое переводит фигуру F в фигуру F_1. По отношению к нему преобразование, которое переводит фигуру F_1 в фигуру F, называется **обратным**. А так как первое преобразование сохраняет расстояния, то и обратное преобразование тоже сохраняет расстояния, то есть тоже является движением.

5. Прежде чем начать доказательство теоремы 9.1, необходимо привести ее формулировку, выделить в ней две части условия и заключения и записать их на доске.

Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.

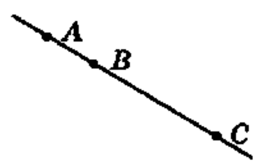


Рис. 9.4

Дано: 1) Точки A, B, C лежат на прямой, точка B лежит между точками A и C (рис. 9.4).

2) Движение точку A переводит в A_1, точку B — в B_1, точку C — в C_1.

Доказать: 1) Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой; 2) точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1.

Доказательство.

1) По свойству измерения отрезков: $AC = AB + BC$, (1)

По определению движения: $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$, $A_1B_1 = AB$. (2)

Тогда верно: $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$, (3)

2) Если точки A_1, B_1, C_1 не лежат на одной прямой, то $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$, т.е. равенство (3) не выполняется, значит, эти точки лежат на одной прямой.

3) Если точка B_1 не лежит между A_1 и C_1, то либо A_1 лежит между B_1 и C_1, либо C_1 лежит между A_1 и B_1 (рис. 9.5). В первом случае $B_1C_1 = A_1B_1 + A_1C_1$, во втором случае $A_1B_1 = A_1C_1 + B_1C_1$, в обоих случаях не выполняется равенство (3). Значит, точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1.

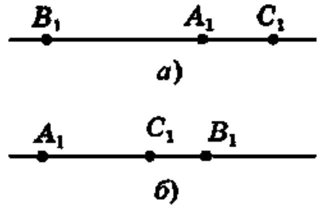


Рис. 9.5

6. После доказательства теоремы следует обсудить ее следствия.

При движении:

1) прямая переходит в прямую;

2) полупрямая переходит в полупрямую;

3) отрезок переходит в отрезок;

4) угол переходит в равный ему угол (при движении сохраняются углы между полупрямыми).

Первое утверждение следует из того, что точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, а второе и третье — из того, что сохраняется порядок их взаимного расположения точек. Третье утверждение мы используем, когда выясняем, в какую фигуру перейдет при движении данная фигура. Например, если вершины треугольника ABC переходят в некоторые точки A_1, B_1 и C_1, то стороны данного треугольника перейдут в отрезки, соединяющие точки A_1, B_1 и C_1, то есть в стороны треугольника $A_1B_1C_1$.

Доказательство утверждения об углах записывается на доске и в тетрадях.

1) Пусть лучи AB и AC — стороны угла BAC, при движении $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$.

2) Тогда по свойству движения $AB \to A_1B_1$, $AC \to A_1C_1$, значит, $\angle BAC \to \angle B_1A_1C_1$.

3) Т.к. движение сохраняет расстояния, то $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$, тогда $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ по трем сторонам. Отсюда $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$.

III. Решение задач

Решить задачу

При движении точки A, B, C переходят соответственно в точки M, N и P. Укажите равные отрезки с концами в данных точках и равные углы с вершинами в данных точках.

Ответ: $AB = MN$, $BC = NP$, $AC = MP$, $\angle ABC = \angle MNP$, $\angle BAC = \angle NMP$, $\angle ACB = \angle MPN$, т. к. при движении сохраняются расстояния и углы.

Решить задачу

Докажите, что при движении ромб переходит в ромб.

Решение.

1) Пусть дан ромб $ABCD$. При движении вершины A, B, C, D переходят соответственно в точки A_1, B_1, C_1, D_1, стороны ромба — в отрезки A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 и A_1C_1. Следовательно, ромб $ABCD$ переходит в четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$.

2) Т.к. в ромбе $ABCD$ все стороны равны, а при движении сохраняются длины отрезков, то и стороны четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ тоже равны. Значит, $A_1B_1C_1D_1$ — ромб.

Решить задачу

Докажите, что при движении перпендикулярные прямые переходят в перпендикулярные прямые.

Решение.

1) Пусть даны прямые AB и BC, такие что $\angle ABC = 90°$. При движении луч BA переходит в луч B_1A_1, а луч BC — в луч B_1C_1.

2) Т.к. при движении сохраняются углы между полупрямыми, то $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = 90°$. Значит, $A_1B_1 \perp B_1C_1$.

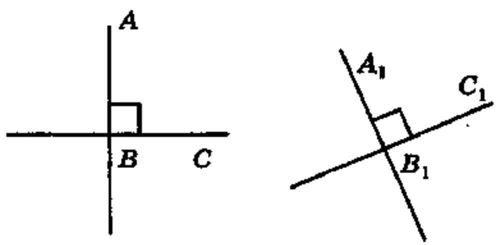


Рис. 9.6

Решить задачу

Докажите, что при движении параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

Решение.

1) Пусть даны прямые $AB \parallel CD$. Проведем секущую KM, как на рисунке 9.7 (точка K между точками A и B, точка M между точками C и D). Пусть $\angle BKM$ и $\angle CMK$ — внутренние накрест лежащие при этих прямых и секущей. Т.к. $AB \parallel CD$, то $\angle BKM = \angle CMK$.

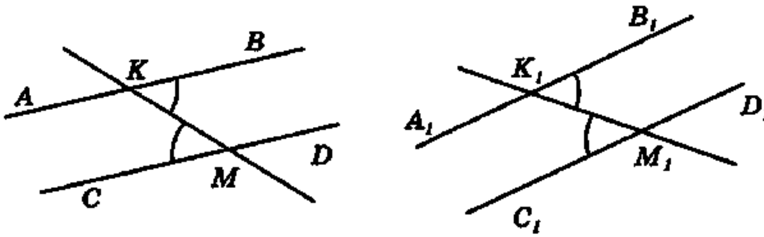


Рис. 9.7

2) При движении данные прямые перейдут в прямые A_1B_1 и C_1D_1, а секущая KM — в прямую K_1M_1, причем K_1M_1 является секущей для прямых A_1B_1 и C_1D_1 (т.к. точка K_1 — общая для прямых A_1B_1 и K_1M_1, а точка M_1 — общая для прямых C_1D_1 и K_1M_1). Углы BKM и KMC перейдут в углы $B_1K_1M_1$ и $K_1M_1C_1$, причем они будут внутренними накрест лежащими (т.к. при движении сохраняется взаимное расположение точек на прямой).

3) Т.к. при движении сохраняются углы, то $\angle B_1K_1M_1 = \angle K_1M_1C_1$, откуда следует, что $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

Замечание. При решении задачи большую часть рассуждений можно провести устно, выполнив лишь краткую запись решения:

1) $\angle BKM = \angle CMK$ (как внутренние накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей KM.

2) $\angle BKM \to \angle B_1K_1M_1$ и $\angle CMK \to \angle C_1M_1K_1$, $\angle B_1K_1M_1$ и $\angle C_1M_1K_1$ — внутренние накрест лежащие при $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ и секущей K_1M_1.

3) Т.к. $\angle B_1K_1M_1 = \angle C_1M_1K_1$, то $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

Решить задачу (устно)

Докажите, что при движении окружность переходит в окружность того же радиуса.

Решение.

Пусть дана окружность с центром O и радиусом R. При движении точка O перейдет в точку O_1, а произвольная точка M данной окружности — в точку M_1. Т.к. при движении сохраняются длины отрезков, то $O_1M_1 = OM = R$, значит, точка M_1 лежит на окружности с центром O_1 и радиусом R.

Кроме того, любая точка окружности с центром O_1 является точкой, в которую при данном движении переходит точка окружности с центром O. Таким образом, вся данная окружность переходит в окружность с центром O_1 и радиусом R.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 1–4 (без доказательства). Решить задачи № 1, 2.

Указания к задачам

1. Пусть дан параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. При движении вершины A, B, C, D переходят в точки A_1, B_1, C_1, D_1, стороны параллелограмма — в отрезки A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 и A_1C_1, диагонали — в отрезки A_1C_1 и B_1D_1, а точка O — в точку O_1, лежащую на отрезках A_1C_1 и B_1D_1. Следовательно, параллелограмм $ABCD$ переходит в четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ с диагоналями A_1C_1 и B_1D_1, пересекающимися в точке O_1, а так как при движении сохраняются длины отрезков, то диагонали A_1C_1 и B_1D_1 точкой O_1 делятся пополам. Таким образом, $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

2. Так как параллелограмм при движении переходит в параллелограмм, а, кроме того, сохраняются расстояния и углы, то квадрат перейдет в параллелограмм, у которого все стороны равны и все углы прямые, то есть в квадрат.

Дополнительные задачи

1. Докажите, что при движении прямоугольник переходит в прямоугольник.

2. Докажите, что при движении равнобокая трапеция переходит в равнобокую трапецию.

3. $ABCD$ — трапеция, боковая сторона AB равна меньшему основанию BC, $\angle ACB = 40°$. При движении точки A, B, C, D переходят соответственно в точки M, N, K и P. Найдите $\angle NMP$.

Ответ: 80°.

Урок 50

ТЕМА: Симметрия относительно точки

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Определение точки, симметричной точке A относительно данной точки O, является конструктивным, и при ответе на вопрос 5 для повторения ученики должны описать процесс построения соответствующей точки с помощью рисунка.

Понятие центрально-симметричных фигур лучше вводить после того, как доказано, что симметрия относительно точки является движением. Это связано с тем, что для обоснования того, что при симметрии относительно некоторой точки фигура переходит сама в себя, удобнее проводить, ссылаясь на свойства движения.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение точек и фигур, симметричных относительно данной точки;

уметь строить точки и простейшие фигуры, симметричные данным относительно данной точки, приводить примеры фигур, имеющих центр симметрии, применять свойства движения в решении задач на симметрию фигур.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	

№	Этап урока	Содержание работы
2	Изучение нового материала — 15 мин	Симметрия относительно точки, центрально-симметричные фигуры
3	Решение задач — 18 мин	Задачи № 5 (устно), 6, 7 (устно), 9
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 5–9. Задачи № 3, 8, 11

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 1 – 4, решение задач № 1 и 2. При ответе на вопросы 2 и 4 вместо доказательства необходимо остановиться на смысле каждого утверждения с иллюстрацией на рисунках. К задачам также выполняются рисунки на доске, а все объяснения даются устно.

II. Изучение нового материала

1. Определение точки, симметричной некоторой точке относительно данной точки, дается в виде способа построения, при этом выполняется рисунок 9.8.

Пусть O — фиксированная точка и X — произвольная точка плоскости. Проведем отрезок XO и на его продолжении за точку O отложим отрезок $OX_1 = XO$. Тогда точка X_1 называется точкой, симметричной точке X относительно точки O.

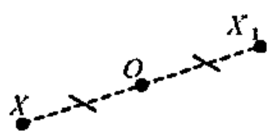


Рис. 9.8

Для закрепления введенного определения можно предложить учащимся несколько простых заданий и вопросов, например:

1) Дана точка O. Постройте точку A_1, симметричную точке A относительно точки O.

2) Какая точка симметрична точке A_1 относительно точки O?

О т в е т: точка *A*.

3) Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Назовите точку, симметричную: а) точке A, б) точке B, в) точке C, г) точке D относительно точки O.

О т в е т: *B*, *A*, *D*, *C*.

2. Для введения определений преобразования симметрии относительно точки и фигур, симметричных относительно точки, можно использовать рис. 9.9.

Преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором каждая ее точка X переходит в точку X_1, симметричную относительно данной точки O, называется преобразованием симметрии относительно точки O.

При этом фигуры F и F_1 называются симметричными относительно точки O.

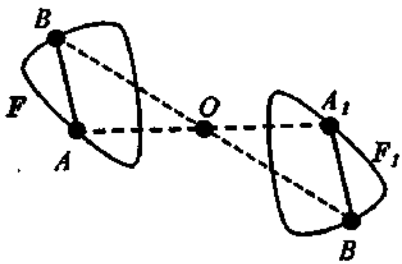


Рис. 9.9

Таким образом, чтобы построить фигуру, симметричную данной относительно некоторой точки, нужно построить точки, симметричные всем точкам данной фигуры относительно этой точки.

3. Далее формулируем и доказываем теорему:

Преобразование симметрии относительно точки является движением.

Прежде чем приступить к доказательству, необходимо вспомнить, что некоторое преобразование является движением, если расстояние между двумя произвольными точками равно расстоянию между их образами (т.е. точками, в которые эти произвольные точки переходят при данном преобразовании).

Доказательство.

1) Пусть A и B — точки фигуры F (рис. 9.9). При симметрии относительно точки O $A \to A_1$, $B \to B_1$.

2) Т.к. $A_1O = AO$, $B_1O = BO$ (по определению симметрии), $\angle A_1OB_1 = \angle AOB$ (как вертикальные), то $\Delta A_1OB_1 = \Delta AOB$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $A_1B_1 = AB$, т.е. при данной симметрии сохраняется расстояние между точками, значит, симметрия относительно точки является движением.

4. В качестве упражнений на закрепление теоремы можно предложить следующие задания:

Задание 1. *Точки A и B при симметрии относительно точки O переходят в точки A_1 и B_1, $AB = 5$. Чему равна длина A_1B_1?*

Ответ: 5.

Задание 2. *Докажите, что при симметрии относительно точки равнобедренный треугольник переходит в равнобедренный треугольник.*

Ответ: симметрия относительно точки является движением, значит, сохраняет расстояния, т.е. равные отрезки переводит в равные отрезки.

5. Прежде чем вводить определение центрально-симметричных фигур, можно предложить учащимся задание:

Задание 3. *Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O. В какую фигуру перейдет этот параллелограмм при симметрии относительно точки O.*

Решение.

1) По свойству диагоналей параллелограмма $AO = OC$ и $BO = OD$ (рис. 9.9).

2) При симметрии относительно точки O: $A \to C$, $B \to D$, $C \to A$, $D \to B$. Тогда по свойству движения $AB \to CD$, $CD \to AB$, $BC \to AD$, $AD \to BC$, т. е. $ABCD \to CDAB$.

Таким образом, параллелограмм переходит сам в себя.

6. Даем определение.

Если преобразование симметрии относительно точки O переводит фигуру F в себя, то она называется центрально-симметричной, а точка O называется центром симметрии.

7. Полезно показать учащимся еще примеры фигур, имеющих центр симметрии. Например, таких, как на рисунке 9.10.

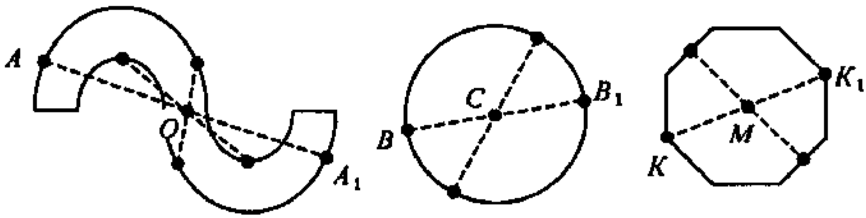


Рис. 9.10

Кроме того, полезно показать учащимся примеры точек и кривых, расположенных в координатной плоскости и симметричных относительно некоторой точки, при этом особое внимание уделив симметрии относительно начала координат (рис. 9.11).

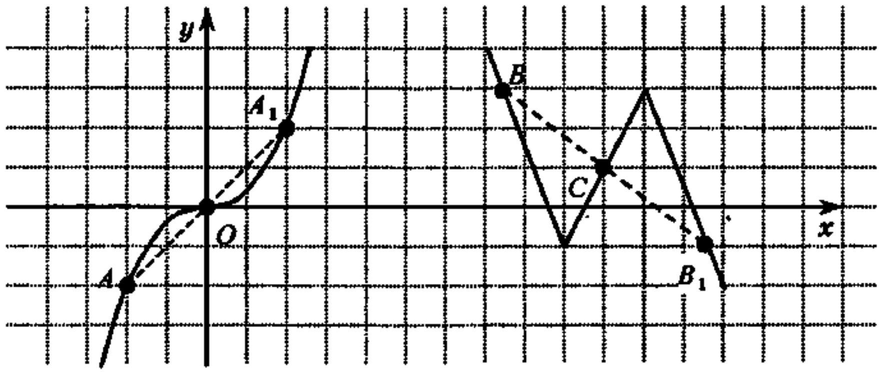


Рис. 9.11

III. Решение задач

Решить задачу № 5 (устно с выполнением рисунка на доске).

Решение.

По определению симметрии относительно точки O (где O — центр окружности) каждая точка A, лежащая на окружности, перейдет в точку B, которая является противоположным точке A концом диаметра (рис. 9.12). Тогда вся окружность перейдет сама в себя, т.е. точка O является для нее центром симметрии

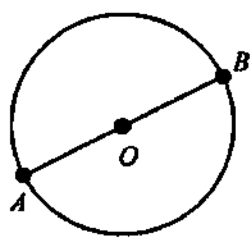


Рис. 9.12

Решить задачу № 6

Перед выполнением решения проводим следующее рассуждение:

Если $X \to X_1$ при симметрии относительно некоторой точки O, то точка O — середина отрезка XX_1.

Построение (рис. 9.13).

1) Построить точку O — середину отрезка XX_1.

2) Отложить на продолжении отрезка YO отрезок $OY_1 = YO$.

Точка Y_1 — искомая.

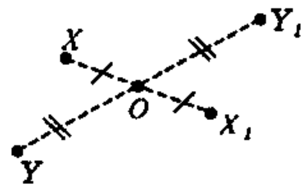


Рис. 9.13

Решить задачу № 7 (устно с выполнением рисунка на доске и в тетрадях).

Решение

Если бы треугольник имел центр симметрии, то при симметрии относительно него каждая вершина перешла бы в вершину. Если у треугольника вершины A и B симметричны относительно точки O, то точка O — середина стороны AB. Но тогда точка, симметричная вершине C, будет находиться вне треугольника (рис. 9.14). Значит, треугольник не может перейти сам в себя при симметрии относительно точки, т.е. не имеет центра симметрии.

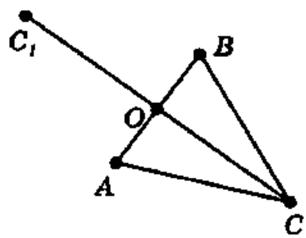


Рис. 9.14

Решить задачу № 9

Решение

1) Если точка O является центром симметрии четырехугольника $ABCD$, то при симметрии относительно точки O каждая вершина должна перейти в вершину.

2) Если $A \to A$, то A — центр симметрии, тогда $B \to C$ или $B \to D$, т. е $A \in BC$ или $A \in BD$, что невозможно.

3) Если $A \to B$, то $C \to D$, тогда точка O — середина сторон AB и CD (рис. 9.15, *а*), что невозможно.

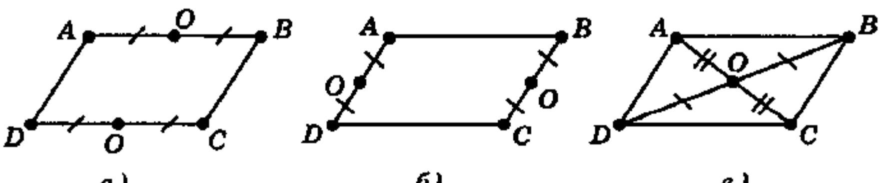


Рис. 9.15

4) Если $A \to D$, то $C \to B$, тогда точка O — середина сторон AD и BC (рис. 9.15, *б*), что невозможно.

5) Значит, $A \to C$, и $B \to D$, тогда точка O — середина диагоналей AC и BD (рис. 9.15, *в*).

6) Так как диагонали пересекаются в точке O и делятся ею пополам, то $ABCD$ — параллелограмм.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 5–9. Решить задачи № 3, 8, 11.

Указания к задачам

3. На продолжении отрезка BA за точку A откладываем отрезок $AB' = AB$.

4. На окружности с центром A и радиусом AB последовательно отметить точки C, D и E такие, что $BC = CD = DE = AB$. Т.к. $\Delta BAC = \Delta CAD = \Delta DAE$ — равносторонние, то $\angle BAE = 180°$, т.е. точка E лежит на луче BA и $BA = AE$. Тогда точка E симметрична точке B относительно точки A.

8. При симметрии относительно точки пересечения диагоналей каждая вершина переходит в противоположную вершину (это следует из свойства диагоналей параллелограмма и определения точек, симметричных относительно точки). Тогда каждая сторона перейдет в противоположную сторону (так как симметрия относительно точки — движение), то есть параллелограмм перейдет сам в себя. Это означает, что точка пересечения диагоналей является для параллелограмма центром симметрии.

10. Анализ. Пусть даны прямые m и n, пересекающиеся в точке A, и точка B, не лежащая на этих прямых. Если есть точки M и N, лежащие на данных прямых, такие что точка B является серединой отрезка MN, то точки M и N симметричны относительно точки B. При этой симметрии точка A перейдет в точку A_1, тогда в четырехугольнике AMA_1N диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то есть этот четырехугольник — параллелограмм (рис. 9.16).

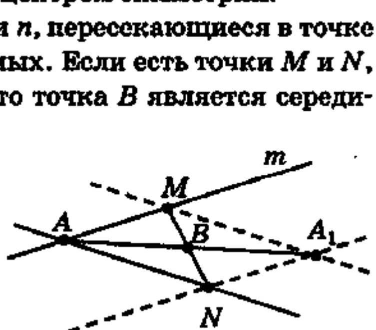


Рис. 9.16

Построение. Строим точку A_1, симметричную точке A относительно точки B. Проводим через точку A_1 две прямые, параллельные данным прямым, точки пересечения построенных прямых с данными прямыми обозначаем M и N. Отрезок MN — искомый.

11. Так как симметрия относительно точки является движением, то отрезку симметричен равный ему отрезок, углу — равный ему угол, треугольнику — равный ему треугольник.

Дополнительные задачи

1. Точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, переходят при симметрии относительно точки O соответственно в точки A_1,B_1, C_1. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

2. Постройте фигуру, симметричную прямоугольнику $ABCD$ относительно точки C.

3. В треугольнике ABC отмечена точка D — середина стороны AC. Точка B_1 симметрична B относительно точки D. Докажите, что четырехугольник $ABCB_1$ — параллелограмм.

4. Даны точки A (−1; 4), B (5; 2). Постройте точки, симметричные данным относительно начала координат; укажите их координаты.

О т в е т См. рис. 9.17: A_1 (1; −4), B_1 (−5; −2).

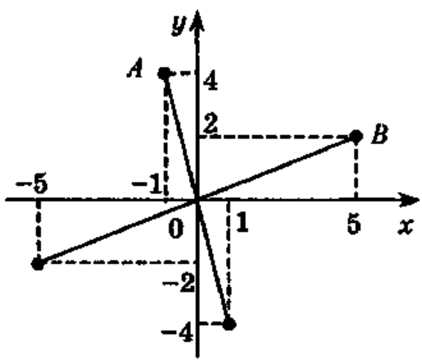


Рис. 9.17

Урок 51

ТЕМА: Симметрия относительно прямой

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Определение точки, симметричной данной относительно прямой, является конструктивным, и при ответе на вопрос для повторения 10 ученики должны описать процесс построения соответствующей точки с помощью рисунка.

Так же как и в случае симметрии относительно точки, лучше приводить определения фигуры, симметричной относительно прямой, и оси симметрии фигуры после того, как рассмотрена теорема 9.3. Особенно это относится к примерам фигур, имеющих ось симметрии, так как обоснования легче давать со ссылкой на свойства движений.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение точек и фигур, симметричных относительно прямой;

уметь строить точки и простейшие фигуры, симметричные данным относительно прямой, приводить примеры фигур, имеющих ось симметрии.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 15 мин	Симметрия относительно прямой, фигуры, имеющие ось симметрии
3	Решение задач — 18 мин	Задачи № 15, 16, 18 (устно), 17 (устно), 19 (устно)
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 10–14. Задачи № 12, 14, 20

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 5–9, решение задач № 3 и 11 устно, № 8 с выполнением рисунка на доске.

II. Изучение нового материала

1. Определение точки, симметричной некоторой точке относительно данной прямой дается в виде способа построения (рис. 9.18).

Пусть g — фиксированная прямая и X — произвольная точка плоскости. Опустим перпендикуляр XA на прямую g. На продолжении перпендикуляра за точку A отложим отрезок $AX_1 = AX$. Тогда точка X_1 называется симметричной точке X относительно прямой g.

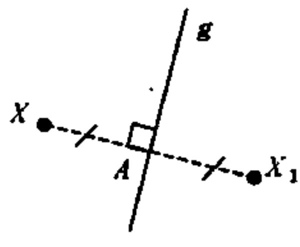


Рис. 9.18

Для закрепления введенного определения можно предложить учащимся задания:

Задание 1

1) Постройте точку A_1, симметричную точке A относительно прямой m.

2) Какая точка симметрична точке A_1 относительно прямой m?

Ответ: точка A.

Задание 2

В прямоугольнике $ABCD$ через точку пересечения диагоналей проведена прямая c, параллельная прямой AB. Назовите точку, симметричную вершине D относительно прямой c.

Ответ: точка A.

2. Для введения определений преобразования *симметрии относительно точки и фигур, симметричных относительно точки*, используем рисунок 9.19.

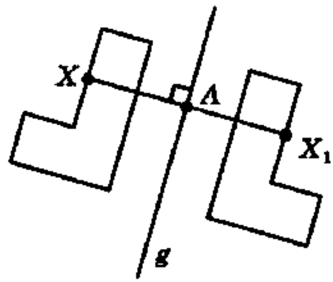


Рис. 9.19

Преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором каждая ее точка X переходит в точку X_1, симметричную относительно данной прямой g, называется преобразованием симметрии относительно прямой g.

При этом фигуры F и F_1 называются симметричными относительно прямой g.

Таким образом, чтобы построить фигуру, симметричную данной относительно некоторой прямой, нужно построить точки, симметричные всем точкам данной фигуры относительно этой прямой.

3. Прежде чем проводить доказательство теоремы 9.3, можно предложить учащимся задание:

Задание 3

Отметьте в координатной плоскости точки A(1; 5) и B (4; 1). Постройте точки A_1 и B_1, симметричные данным точкам относительно оси y. Укажите координаты точек A_1 и B_1. Вычислите и сравните длины отрезков AB и A_1B_1.

Р е ш е н и е (рис. 9.20).

$A_1(-1; 5)$, $B_1(-4; 1)$;

$AB = \sqrt{(4-1)^2+(1-5)^2} = 5$;

$A_1B_1 = \sqrt{(-4+1)^2+(1-5)^2} = 5$;

$A_1B_1 = AB$.

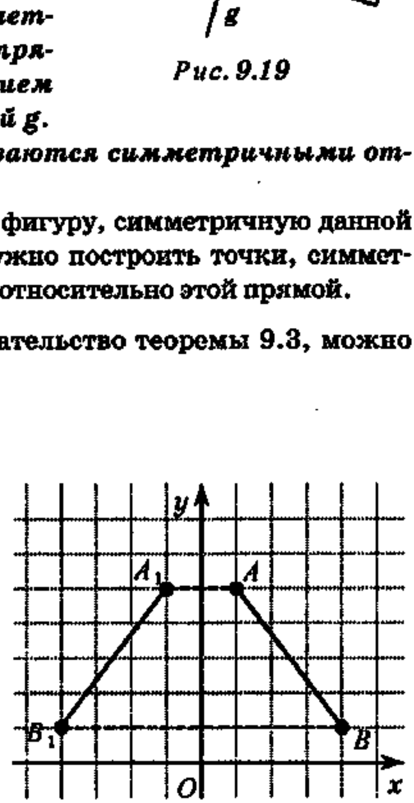


Рис. 9.20

4. После решения этой задачи формулируем и доказываем теорему (ее доказательство повторяет ход рассуждения, примененный при решении задачи, только сначала нужно ввести систему координат).

Преобразование симметрии относительно прямой является движением.

Как и при доказательстве аналогичной теоремы о симметрии относительно точки, проводим предварительные рассуждения. Нам нужно рассмотреть две произвольные точки и доказать, что расстояние между ними равно расстоянию между точками, в которые они переходят при симметрии относительно прямой. Для доказательства будем использовать координатный метод: введем удобным образом систему координат, запишем координаты рассматриваемых точек и найдем нужные нам расстояния по формуле расстояния между точками.

Доказательство.

1) Пусть при симметрии относительно прямой g $A \to A_1$, $B \to B_1$. Примем за ось y прямую g (см. рис. 9.22).

2) Пусть A $(x_1;\ y_1)$ и B $(x_2;\ y_2)$. Тогда A_1 $(-x_1;\ y_1)$, т.к. по определению симметрии относительно прямой точки A и A_1 лежат на прямой, перпендикулярной оси y, и на одинаковых расстояниях от нее. Аналогично, B_1 $(-x_2;\ y_2)$.

3) $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$; $A_1B_1{}^2 = (-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Тогда $AB^2 = A_1B_1{}^2$, $AB = A_1B_1$.

Таким образом, симметрия относительно прямой сохраняет расстояние между точками, т. е. она является движением.

5. В качестве упражнений на закрепление теоремы можно предложить следующие:

Задание 4

Точки A и B при симметрии относительно прямой g переходят в точки A' и B'. Известно, что A'B' = 3,5. Чему равна длина отрезка AB?

О т в е т: 3,5.

Задание 5

Докажите, что при симметрии относительно прямой равносторонний треугольник переходит в равносторонний треугольник.

О т в е т: так как симметрия относительно прямой является движением, то равные отрезки перейдут в равные отрезки, т.е. равносторонний треугольник перейдет в треугольник с равными сторонами, т.е. в равносторонний треугольник..

6. Определения фигуры, симметричной относительно прямой, и оси симметрии фигуры рассматриваем сначала на примере ромба. Учащимся дается задание:

Задание 6

Докажите, что при симметрии относительно прямой AC ромб ABCD переходит сам в себя.

Р е ш е н и е (рис. 9.21).

При симметрии относительно прямой AC: $A \to A$, $C \to C$ (т.к. эти точки лежат на прямой AC), $B \to D$, $D \to B$ (т. к. $BD \perp AC$ и $BO = OD$), тогда $AB \to AD$, $AD \to AB$, $CB \to CD$, $CD \to CB$, т.е. $ABCD \to ABCD$.

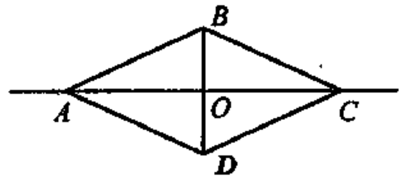


Рис. 9.21

Если преобразование симметрии относительно прямой g переводит фигуру в себя, то эта фигура называется симметричной относительно прямой g, а прямая g называется осью симметрии.

Таким образом, ромб имеет оси симметрии, проходящие по его диагоналям.

Полезно показать учащимся и другие примеры фигур, имеющих ось симметрии, например, изображенные на рисунках 9.22 и 9.23.

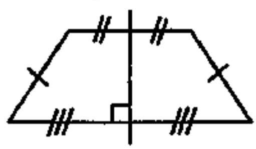


Рис. 9.22

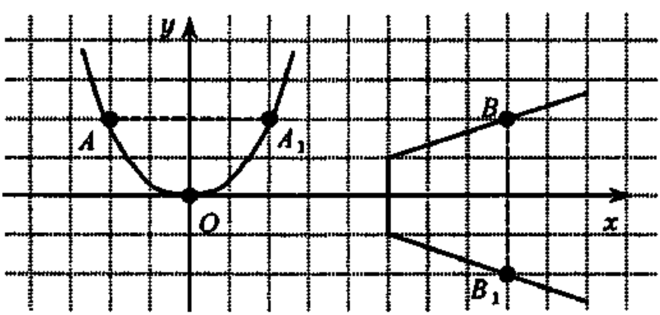


Рис. 9.23

III. Решение задач

Решить задачу

Начертите треугольник ABC. Постройте симметричный ему треугольник относительно:

а) прямой BC;

б) прямой AM ∥ BC.

Решение на рис. 9.24.

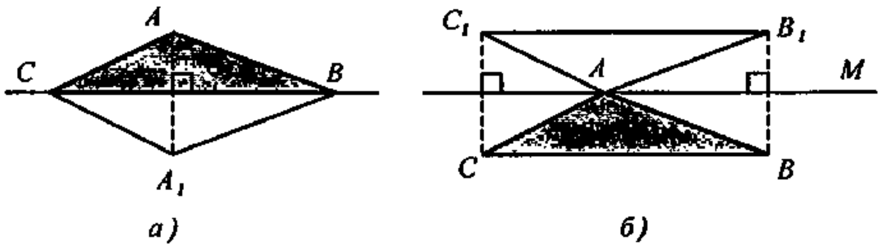


Рис. 9.24

Решить задачу

Начертите равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Постройте точку M, симметричную точке B относительно прямой AC. Определите вид четырехугольника ABCM.

Решение.

1) Проведем высоту BH и на ее продолжении отложим $HM = BH$. Тогда при симметрии относительно AC $B \to M$ (рис. 9.25).

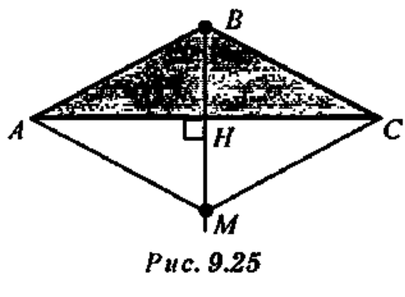


Рис. 9.25

2) По определению движения $AM = AB$ и $CM = BC$. Тогда $AB = BC = CM = AM$, т. е. $ABCM$ — ромб.

Решить задачу № 15

Перед выполнением решения проводим следующее рассуждение:

Если $X \to X_1$ при симметрии относительно некоторой прямой a, то прямая a — серединный перпендикуляр к отрезку XX_1.

Построение (рис. 9.26).

1) Построить прямую a — серединный перпендикуляр к отрезку XX_1.

2) Опустить перпендикуляр YO к прямой a. Отложить на продолжении отрезка YO отрезок $OY_1 = YO$. Точка Y_1 — искомая.

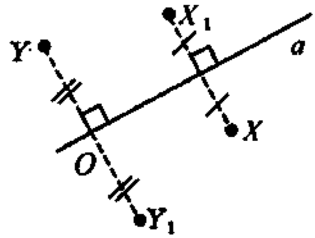


Рис. 9.26

Решить задачу № 16

Решение.

1) Пусть AK — прямая, содержащая биссектрису угла BAC.

2) При симметрии относительно AK $A \to A$, $K \to K$, $B \to B_1$ (причем B и B_1 лежат по разные стороны от AK), тогда $\angle KAB \to \angle KAB_1$.

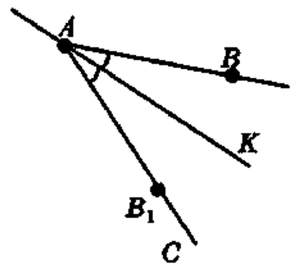


Рис. 9.27

3) Т.к. симметрия является движением, то $\angle BAK = \angle B_1AK$. Тогда луч AB_1 совпадает с лучом AC (рис. 9.27). Значит, при симметрии относительно прямой AK луч AB переходит в луч AC.

4) Аналогично луч AC переходит в луч AB. Таким образом, $\angle BAC$ при симметрии относительно прямой, содержащей его биссектрису, переходит сам в себя. Следовательно, прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии.

Решить задачу № 18 (устно)

Решение.

1) Если треугольник при симметрии относительно прямой a переходит сам в себя, то по свойствам движения каждая его сторона переходит в сторону, а вершина в вершину. У треугольника три вершины, следовательно, одна из них должна перейти сама в себя, т. е. лежать на оси симметрии.

2) Т.к. симметрия относительно прямой сохраняет расстояния, то стороны треугольника, переходящие друг в друга, должны иметь равные длины, значит, треугольник равнобедренный (рис. 9.28).

Решить задачу № 17 (устно)

Решение.

1) Пусть в ΔABC $AB = BC$, BD — медиана. Рассмотрим симметрию относительно прямой BD (рис. 9.28). По свойству равнобедренного треугольника $BD \perp AC$ и $AD = DC$. Следовательно, точки A и C симметричны относительно BD. Точка B переходит в себя, так как она лежит на прямой BD.

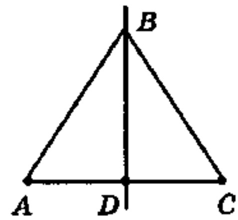


Рис. 9.28

2) Т.к. $A \to C$, $C \to A$, $B \to B$, а симметрия является движением, то $AB \to CB$, $CB \to AB$, $AC \to CA$, т. е. треугольник при рассматриваемой симметрии перейдет сам в себя.

Решить задачу № 19 (устно)

По доказанному в задаче 17 прямая, содержащая медиану равнобедренного треугольника, является его осью симметрии. Следовательно, равносторонний треугольник имеет три такие оси симметрии. А по доказанному в задаче 18(1) ось симметрии должна проходить через вершину треугольника, следовательно, других осей симметрии нет.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 10–14. Решить задачи № 12, 14, 20.

Указания к задачам

12. Строим: 1) прямую AB, 2) прямую $CK \perp AB$, M — точка их пересечения, 3) отрезок $MC' = CM$ на продолжении отрезка CM за точку M. Точка C' — искомая.

13. Из точки A проводим дугу радиусом, равным AC, а из точки B проводим дугу радиусом, равным BC. Искомая точка — это точка пересечения проведенных дуг, лежащая с точкой C в разных полуплоскостях относительно прямой AB (рис. 9.29).

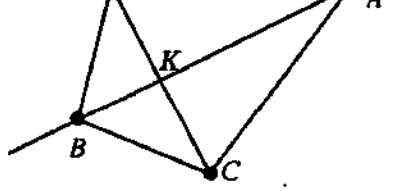


Рис. 9.29

Докажем, что построенная таким образом точка C_1 симметрична точке C относительно прямой AB. Точки A и B равноудалены от концов отрезка CC_1, значит, они лежат на серединном перпендикуляре к этому отрезку, то есть $AB \perp CC_1$ и $CK = KC_1$. Таким образом, точки C и C_1 симметричны относительно прямой AB по определению.

14. Ответ: 1) $(-3; -4)$, 2) $(3; 4)$, 3) $(3; -4)$.

20. По свойствам диагоналей прямоугольника (рис. 9.30) $AC = BD$, $AO = OC = AC : 2$, $BO = OD = BD : 2$, тогда $AO = BO = CO = DO$. Т.к. $a \parallel AD$, $b \parallel AB$, то a и b — прямые, проходящие по высотам равнобедренных треугольников, проведенным к их основаниям. Тогда a и b — серединные перпендикуляры к сторонам прямоугольника.

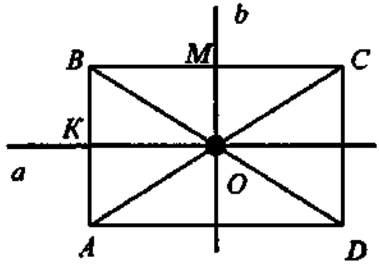


Рис. 9.30

Значит, при симметрии относительно a: $A \to B$, $B \to A$, $C \to D$, $D \to C$, тогда $AB \to BA$, $CD \to DC$, $BC \to AD$, $AD \to BC$, т.е. $ABCD \to ABCD$. Аналогично, при симметрии относительно прямой b $ABCD \to ABCD$. Таким образом, прямые a и b являются осями симметрии прямоугольника $ABCD$.

21. См. решение задания 6.

22. Можно использовать результаты задач № 20 и 21, т.к. квадрат — это ромб и прямоугольник.

23. Нужно доказать, что окружность при симметрии относительно некоторой прямой a, проведенной через центр окружности, переходит сама в себя. Для решения задачи нужно сначала рассмотреть два частных случая:

1) точки C и C_1 — концы диаметра, перпендикулярного прямой a, они при рассматриваемой симметрии переходят друг в друга;

2) точки B и D — точки пересечения прямой a и окружности, они при рассматриваемом преобразовании переходят сами в себя (рис. 9.31).

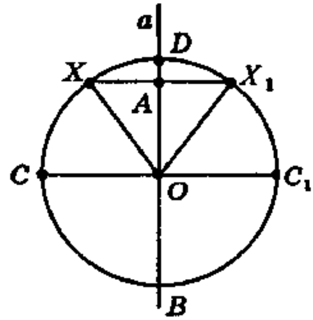


Рис. 9.31

3) После этого рассматривается общий случай: если точка X окружности при симметрии относительно прямой a переходит в точку X_1, то прямоугольные треугольники OAX и OAX_1 равны по двум катетам. Значит, $OX_1 = OX$, то есть точка X_1 лежит на окружности. Таким образом, любая точка полуокружности BCD перейдет в точку на полуокружности BC_1D и при этом все точки, симметричные полуокружности BCD, составят полуокружность BC_1D и наоборот. Это значит, что вся окружность перейдет сама в себя.

24. Пусть прямые a и c пересекаются в точке B и пересекают прямую b в точках M и K (см. рис. 9.32, *а*). Из условия следует, что концы искомого отрезка должны быть симметричны относительно прямой b.

Построим точку B_1, симметричную точке B относительно прямой b. При этой симметрии точки M и K перейдут сами в себя, прямая a перейдет в прямую MB_1 (прямую a_1), а прямая c — в прямую KB_1 (прямую c_1) (рис. 9.32, *б*). Обозначим точку пересечения прямых a и c_1 буквой A, точку пересечения прямых c и a_1 буквой C. Так как прямые a и a_1, c и c_1 симметричны относительно прямой b, то точки A и C тоже симметричны относительно прямой b. Отрезок AC — искомый.

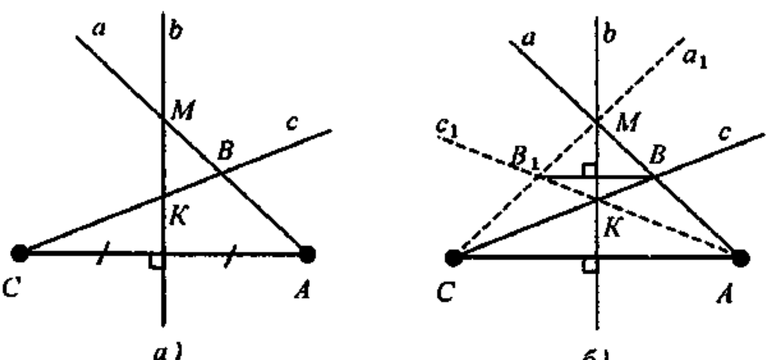


Рис. 9.32

Дополнительные задачи

1. Даны точки A $(-1; -3)$ и B $(4; 2)$. Укажите координаты концов и постройте отрезок, симметричный отрезку AB относитель-

но: а) оси x; б) оси y; в) прямой, заданной уравнением $x = 3$; г) прямой, заданной уравнением $y = 1$.

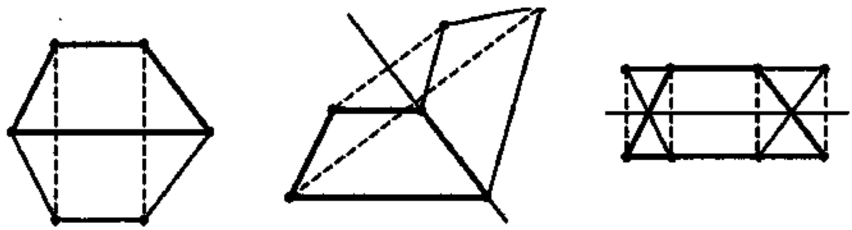
Ответ: *а* — $A_1(-1; 3)$, B_1 $(4; -2)$; *б* — $A_2(1; -3)$, B_2 $(-4; 2)$; *в* — $A_3(7; -3)$, B_3 $(2; 2)$; *г* — $A_4(-1; 5)$, B_4 $(4; 0)$.

2. Сколько осей симметрии имеет окружность?

Ответ: бесконечно много.

3. Изобразите произвольную трапецию. Постройте фигуру, симметричную этой трапеции относительно а) большего основания; б) боковой стороны; в) средней линии.

Ответ: см. рис. 9.33.



а) *б)* *в)*

Рис. 9.33

4. Треугольник ABC равнобедренный ($AB = AC$), A_1 — точка, симметричная точке A относительно основания BC. Докажите, что четырехугольник ABA_1C — ромб.

Урок 52

ТЕМА: Поворот

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

В пункте рассматривается еще один вид преобразования фигур — поворот около данной точки. В отличие от симметрий относительно точки и относительно прямой, для которых доказывалось, что они являются движениями, поворот является движением по определению. Кроме того, формулировка определения поворота не содержит алгоритма построения образа данной точки, поэтому такой алгоритм должен быть сформулирован отдельно.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение поворота,

уметь строить образы простейших фигур при повороте (луч с началом в центре поворота, точка, отрезок).

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 15 мин	Поворот около данной точки. Задача № 25
3	Решение задач — 8 мин	Дидактические задачи на поворот фигур
4	Самостоятельная работа — 10 мин	
	Домашнее задание — 2 мин	Контрольный вопрос 15, повторить вопросы 4 и 5 из § 8 (без вывода). Задача № 26

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 10–14, решение задач № 12, 14, 17.

При проверке задачи 14 полезно не только указать координаты искомых точек, но также сформулировать, как связаны координаты точек, симметричных относительно той или другой оси или относительно начала координат. Для этого точки следует построить в координатной плоскости (рис. 9.34) и вспомнить определения симметрии относительно прямой и относительно точки.

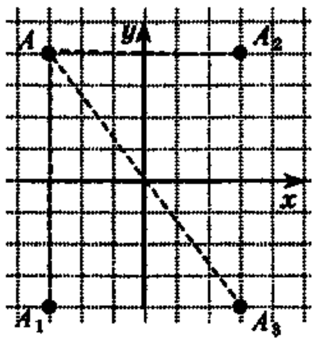


Рис. 9.34

II. Изучение нового материала

1. В определении поворота необходимо выделить две части:

1) поворот является движением (то есть сохраняет расстояния);

2) каждый луч с началом в данной точке поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении (рис. 9.35).

Этот угол называется углом поворота.

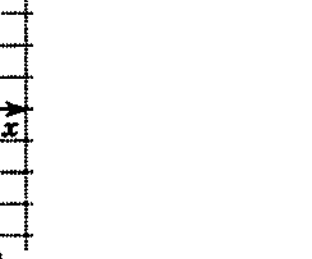


Рис. 9.35

Следует отметить, что точка *O*, около которой осуществляется поворот, переходит сама в себя.

Для того чтобы показать, как работает это определение, необходимо сформулировать алгоритм построения точки, в которую переходит точка *A* при повороте около точки *O* на угол α в заданном направлении (против часовой стрелки или по часовой стрелке), а затем от построения точки перейти к построению фигуры. С этой целью используем задачу № 25. Решение задачи состоит из подводящих рассуждений и указания шагов построений. Все рассуждения можно выполнить устно, а построения должны быть записаны учащимися в тетрадях, так как они показывают правила построения образов точки и отрезка при повороте.

Решить задачу № 25

Решение.

1) Перед построением проводим рассуждения. По определению, точка A_1 должна лежать на луче OM, образующем угол 60° с лучом OA. Кроме того, поворот, являясь движением, сохраняет расстояния, поэтому $OA_1 = OA$.

Построение.

а) Проводим луч OA;

б) от луча OA откладываем по часовой стрелке $\angle AOM = 60°$;

в) на луче OM откладываем отрезок $OA_1 = OA$. Точка A_1 — искомая (рис. 9.36, *а*).

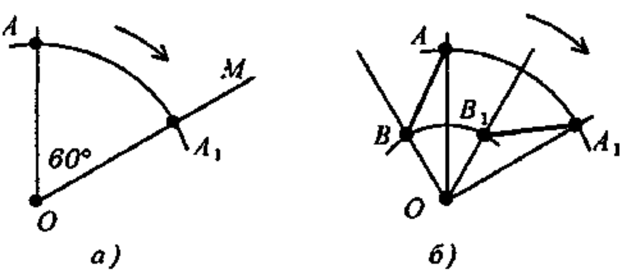


Рис. 9.36

2) Поскольку поворот — движение, то при повороте отрезок перейдет в отрезок, поэтому достаточно построить точки, в которые при заданном повороте перейдут концы отрезка, и соединить их.

Построение.

а) Строим A_1 ($A \to A_1$);

б) Строим B_1 ($B \to B_1$);

в) Отрезок A_1B_1 — искомый (рис. 9.36, *б*).

Замечание. Полезно напомнить учащимся, что решить задачу на построение — это значит указать такие основные построения, которые можно выполнить циркулем и линейкой (если специально не оговорено, что построение должно быть выполнено другим способом, например только циркулем, только линейкой, линейкой с делениями или транспортиром, угольником и т.п.). Так, при решении первой части задачи построение луча OA выполняется линейкой, а откладывание отрезка OA_1, равного отрезку OA, — циркулем. А как построить циркулем и линейкой угол,

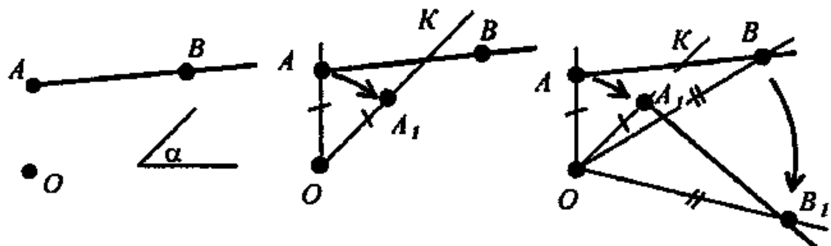
равный 60°, и при этом отложить его в нужном нам направлении? Мы знаем, что угол 60° — это угол равностороннего треугольника. Поэтому пункт б) построения состоит в том, что мы строим в полуплоскости, которая находится в направлении по часовой стрелке от прямой *OA*, равносторонний треугольник OAA_1 по трем сторонам, равным *OA*. В этом случае пункт в) не нужен, так как точка A_1 уже построена. Однако записи, которые мы сделали выше, представляют собой алгоритм построения образа точки при повороте. Различия могут заключаться в другом направлении поворота и другом угле поворота.

Решение второй части задачи записано в еще более свернутом виде. Здесь подразумевается, что точки A_1 и B_1 строятся так, как в первой части задачи.

III. Решение задач

Решить задачу

Даны луч AB, точка O, не лежащая на прямой AB, и острый угол α (рис. 9.37, а). Постройте луч, в который переходит луч AB при повороте около точки O на угол α по часовой стрелке.



а) *б)* *в)*

Рис. 9.37

Построение.

1) Строим точку A_1 ($A \to A_1$): откладываем от луча *OA* угол $AOK = \alpha$, на луче *OK* откладываем отрезок $OA_1 = OA$ (рис. 9.37, *б*);

2) Аналогично строим B_1 ($B \to B_1$).

3) Проводим искомый луч A_1B_1 (рис. 9.37, *в*).

Решить задачу

Запишите координаты точки, в которую переходит точка А (2; 0) при повороте около начала координат на угол 90° по часовой стрелке.

Решение.

При заданном повороте положительная полуось абсцисс перейдет в отрицательную полуось ординат (рис. 9.38), а т.к. $OA_1 = OA$, то $A_1(0; -2)$.

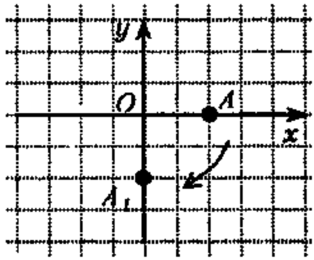


Рис. 9.38

III. Самостоятельная работа

1-й вариант

1. Дан треугольник ABC. Постройте точку, симметричную точке A относительно прямой BC.

2. Постройте точку M_1, симметричную точке M (4; −3) относительно начала координат. Запишите координаты построенной точки.

Ответ: M_1 (−4; 3).

2-й вариант

1. Дан треугольник ABC. Постройте точку A_1, симметричную точке A относительно вершины C.

2. Постройте точку D_1, симметричную точке D (−3; 2) относительно оси x. Запишите координаты построенной точки.

Ответ: $D_1(-3; -2)$.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольный вопрос 15, повторить вопросы 4 и 5 из § 8 (без вывода). Решить задачу № 26.

Указания к задачам

26. Так как вершина C перейдет сама в себя, то нужно построить точки A_1 и B_1, в которые перейдут точки A и B. Так как поворот осуществляется на 60°, то ΔCAA_1 и ΔCBB_1 должны быть равнобедренными с углом 60° между боковыми сторона-

ми, то есть равносторонними. Поэтому для построения достаточно построить на отрезках CB и CA как на сторонах два равносторонних треугольника: ΔCAA_1 и ΔCBB_1. Тогда ΔCA_1B_1 — искомый.

Дополнительные задачи

1. Начертите отрезок AB и постройте отрезок, в который он переходит при повороте вокруг своей середины: а) на 90° по часовой стрелке; б) на 60° против часовой стрелки.

2. Постройте квадрат со стороной 4 см и возьмите на его противоположных сторонах по точке. Постройте точки, в которые переходят выбранные точки при повороте вокруг точки пересечения диагоналей квадрата на 90° по часовой стрелке.

Урок 53

ТЕМА: Параллельный перенос и его свойства

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

В отличие от симметрий и поворота определение параллельного переноса дается с помощью формул, указывающих связь между координатами точки и ее образа при данном параллельном переносе. Такое определение выглядит формальным, а не конструктивным, как у предыдущих видов движения, однако если проиллюстрировать на рисунке эти формулы, то можно заметить, что они тоже дают способ построения точки, в которую переходит данная точка координатной плоскости при параллельном переносе: она смещается на a вдоль оси абсцисс и на b вдоль оси ординат. Это преобразование дает еще один пример движений, причем все свойства движений для параллельного переноса являются самыми очевидными для учащихся.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать формулы, задающие параллельный перенос; тот факт, что параллельный перенос есть движение; геометрические свойства параллельного переноса (как смещаются точки, во что переходит прямая при параллельном переносе);

уметь строить фигуры, в которые переходят соответственно данная точка, прямая, полупрямая, отрезок при заданном параллельном переносе.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 15 мин	Определение и свойства параллельного переноса
3	Решение задач — 18 мин	Дидактические задачи на параллельный перенос фигур
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 16, 17. Задачи № 27–29

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопрос 15, решение задачи № 26 с выполнением построения на доске.

II. Изучение нового материала

1. Учитель сообщает учащимся определение параллельного переноса.

Введем на плоскости систему декартовых координат. Тогда каждая точка фигуры F имеет некоторые координаты $(x; y)$.

Преобразование фигуры F, при котором каждая ее точка $A(x; y)$ переходит в точку $A_1(x + a; y + b)$, где a и b — одни и те же числа для всех точек $(x; y)$, называется параллельным переносом.

Итак, параллельный перенос, переводящий точку $A(x;\ y)$ в точку $A_1(x_1;\ y_1)$, задается формулами: $x_1 = x + a,\qquad y_1 = y + b.$

Для более осознанного восприятия формул, задающих параллельный перенос, можно выполнить рис. 9.39. На нем видно, что каждая из точек A, B и C сместилась на одно и то же расстояние вдоль оси x и на одно и то же расстояние вдоль оси y. Это значит, что у этих точек на одно и то же число изменились абсциссы и на одно и то же число изменились ординаты.

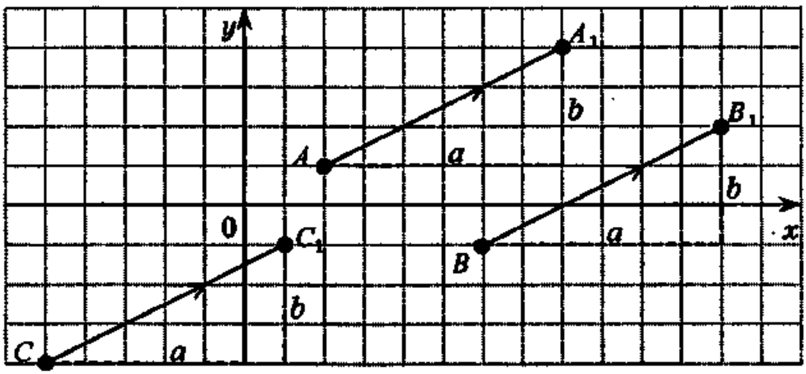


Рис. 9.39

2. Для закрепления определения и подготовки к доказательству утверждений о том, что параллельный перенос есть движение, и о том, как смещаются точки при параллельном переносе, можно выполнить следующее упражнение.

1) Даны точки $A(1;\ 1)$ и $B\ (4;\ -3)$. Параллельный перенос задан формулами $x_1 = x + 3$, $y_1 = y + 2$.

а) Найдите координаты точек A_1 и B_1, в которые переходят точки A и B при этом параллельном переносе.

Р е ш е н и е.

Точка A_1: $x_1 = 1 + 3 = 4$, $y_1 = 1 + 2 = 3$; точка B_1: $x_1 = 4 + 3 = 7$, $y_1 = -3 + 2 = -1$.

О т в е т: $A_1\ (4;\ 3)$ и $B_1\ (7;\ -1)$.

б) Найдите расстояние между точками A и B и между точками A_1 и B_1.

Р е ш е н и е.

$AB^2 = (4 - 1)^2 + (-3 - 1)^2 = 25, AB = 5; A_1B_1{}^2 = (7 - 4)^2 + (-1 - 3)^2 =$ $= 25, A_1B_1 = 5.$

О т в е т: $AB = A_1B_1 = 5$.

в) Постройте в координатной плоскости точки A, B, A_1 и B_1.
Ответ: рис. 9.40.

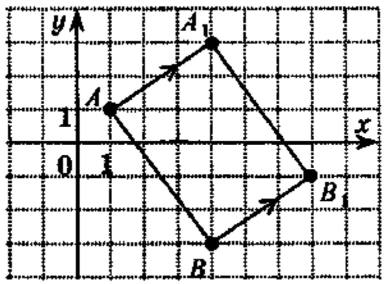


Рис. 9.40

г) Докажите, что AA_1B_1B – параллелограмм.
Решение.

1) Найдем середину отрезка AB_1: $x = \frac{1+7}{2} = 4$, $y = \frac{1-1}{2} = 0$, (4; 0).

2) Найдем середину отрезка A_1B: $x = \frac{4+4}{2} = 4$, $y = \frac{3-3}{2} = 0$, (4; 0).

3) В четырехугольнике AA_1B_1B диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, значит, он является параллелограммом.

После решения задачи необходимо обратить внимание учащихся на то, что при данном параллельном переносе 1) расстояние между данными точками и их образами сохранилось, 2) точки A и B сместились по параллельным прямым на одно и то же расстояние, а прямая AB перешла в прямую A_1B_1, параллельную AB.

3. Далее формулируются и доказываются утверждения о параллельном переносе.

Параллельный перенос есть движение.

При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.

При параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя).

Доказательства этих утверждений повторяют схему рассуждений решения рассмотренной выше задачи. При проведении доказательства все выкладки записываются на доске, а обоснования делаются устно. В тетрадях записи можно не выполнять.

Доказательство.

Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — произвольные точки, а параллельный перенос задан формулами:

$x' = x + a$; $y' = y + b$, тогда $A(x_1; y_1) \to A'(x_1 + a; y_1 + b)$, $B(x_2; y_2) \to$ $\to B'(x_2 + a; y_2 + b)$.

1) $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ и $A'B'^2 = (x_2 + a - x_1 - a)^2 + (y_2 + b -$ $- y_1 - b)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Т.к. $AB = A'B'$, то параллельный перенос сохраняет расстояния, а значит, является движением.

2) Найдем координаты середины отрезка AB':

$$x = \frac{x_1 + x_2 + a}{2},\ y = \frac{y_1 + b + y_2}{2}.$$

Найдем координаты середины отрезка

$$A'B\colon\ x = \frac{x_1 + a + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}.$$

Таким образом, в четырехугольнике $AA'B'B$ диагонали имеют общую середину, т. е. пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, значит, этот четырехугольник является параллелограммом. Тогда $AA' \parallel BB'$, $AA' = BB'$, т.е. точки смещаются по параллельным прямым на одинаковые расстояния и $AB \parallel A'B'$, т.е. прямая переходит в параллельную прямую.

Замечание. Отдельно рассматривается случай, когда точка B лежит на прямой AA' (т. е. нельзя рассматривать четырехугольник $AA'B'B$). Доказательство этого утверждения изложено в учебнике в виде замечания, его доказательство можно на уроке не рассматривать, предложив желающим самостоятельно разобрать это доказательство.

Можно также, используя рис. 9.41, показать, что

1) т.к. отрезки AB' и $A'B$ имеют общую середину и точка B лежит на прямой AA', то все четыре точки лежат на одной прямой;

2) $AA' = \dfrac{AB'}{2} + \dfrac{A'B}{2}$ и $BB' = \dfrac{AB'}{2} + \dfrac{A'B}{2}$, т.е. $AA' = BB'$.

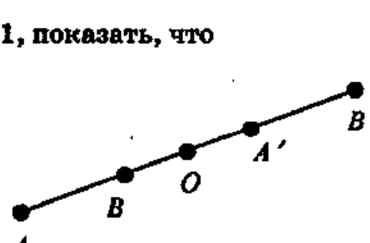


Рис. 9.41

4. Затем необходимо разобрать с учащимися алгоритмы построения образа произвольной точки M при параллельном переносе, если параллельный перенос задан двумя точками: некоторой точкой A и точкой, в которую она переходит при этом переносе. Целесообразно рассмотреть с учащимися на уроке следующие способы.

1-й способ (рис. 9.42, *а*). Если точка M не лежит на прямой AA_1, то через точку M проводим прямую, параллельную AA_1, через точку A_1 — прямую, параллельную AM; точка пересечения этих прямых есть точка M_1, в которую переходит точка M.

2-й способ (рис. 9.42, *б*). Через середину O отрезка A_1M проводим луч AO; откладываем на нем отрезок OM_1, равный OA (так, чтобы точка M_1 была с точкой A по разные стороны от точки O); точка M_1 — искомая.

Замечания. 1) Второй способ построения точки M_1 по данным точкам A, A_1 и M пригоден и для случая, когда точки A, A_1 и M лежат на одной прямой. 2) Вообще говоря, существует третий способ построения точки, наверное, самый популярный. Этот способ следует показать учащимся, но сделать замечание о том, что формальное определение сонаправленных лучей будет рассмотрено на следующем уроке.

3-й способ (рис. 9.42, *в*). На луче, исходящем из точки M и сонаправленным с лучом AA_1, отложить отрезок $MM_1 = AA_1$.

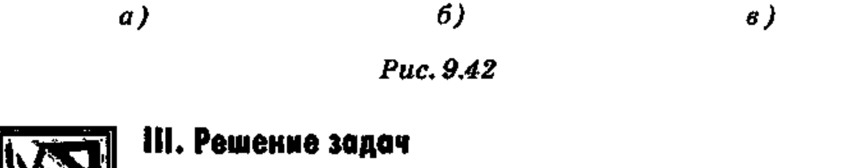


Рис. 9.42

III. Решение задач

Решить задачу

При параллельном переносе точка $A(3; -1)$ переходит в точку A_1 $(5; 1)$. В какие точки при этом параллельном переносе перейдут точки $B(1; 2)$ и $C(-2; -5)$?

Решение.

1) Т.к. $5 = 3 + 2$, $1 = -1 + 2$, то параллельный перенос задан формулами: $x_1 = x + 2$, $y_1 = y + 2$.

2) Тогда $B_1(1 + 2;\ 2 + 2)$ и $C_1(-2 + 2;\ -5 + 2)$, т. е. $B_1(3;\ 4)$ и $C_1(0;\ -3)$.

Решить задачу

Параллельный перенос задан формулами $x_1 = x + 1$ и $y_1 = y - 2$. Постройте фигуру, в которую перейдет треугольник с вершинами $A\ (3;\ 3)$, $B\ (0;\ 1)$, $C(-1;\ 2)$ при этом параллельном переносе.

Решение может быть выполнено двумя способами

1-й способ. Построив в координатной плоскости точки A, B и C, смещаем каждую из них на одну единицу вправо и на две единицы вниз, получаем точки A_1, B_1 и C_1. Строим $\Delta A_1B_1C_1$.

2-й способ. Находим координаты точек A_1, B_1 и C_1: $A_1(3 + 1;\ 3 - 2)$, $B_1(0 + 1;\ 1 - 2)$, $C_1(-1 + 1;\ 2 - 2)$, т. е. $A_1(4;\ 1)$, $B_1(1;\ -1)$, $C_1(0;\ 0)$. Строим $\Delta A_1B_1C_1$.

Решить задачу

Напишите формулы параллельного переноса, являющегося результатом двух последовательно выполненных параллельных переносов, заданных формулами: $x_1 = x - 2$, $y_1 = y + 3$ и $x_1 = x + 4$, $y_1 = y + 5$.

Решение.

При первом переносе каждая точка $M(x;\ y)$ перейдет в точку $M_1(x - 2;\ y + 3)$, при втором параллельном переносе точка M_1 перейдет в точку $M_2(x - 2 + 4;\ y + 3 + 5)$ или $M_2(x + 2;\ y + 8)$. В результате получится параллельный перенос, определяемый формулами $x' = x + 2$, $y' = y + 8$.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 16, 17. Решить задачи № 27–29.

Указания к задачам

27. Одним из разобранных на уроке способов строим точку C_1, при этом если точки A, B и C не лежат на одной прямой, то полу-

чим параллелограмм ABC_1C, а если данные точки лежат на одной прямой, то и точка C_1 лежит на этой прямой и $CC_1 = AB$.

28. $(0; 0) \to (1; -1)$, $(1; 0) \to (2; -1)$, $(0; 2) \to (1; 1)$.

29. Так как $a = x' - x$, $b = y' - y$, то 1) $a = 2$, $b = 2$; 2) $a = -3$, $b = 8$; 3) $a = 1$, $b = 1$.

Дополнительные задачи

1. При параллельном переносе, заданном формулами $x_1 = x + 3$ и $y_1 = y + 4$, вершина A квадрата $ABCD$ переходит в точку B. Найдите диагональ этого квадрата.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

2. Параллельный перенос переводит конец A отрезка AB в точку A_1, принадлежащую прямой AB. Постройте отрезок, в который перейдет отрезок AB при этом параллельном переносе.

3. Параллельный перенос переводит точку A в точку A_1, не лежащую на прямой AB. Постройте фигуру, в которую перейдет полупрямая AB при этом параллельном переносе.

Указание. Достаточно построить отрезок A_1B_1, в который перейдет отрезок AB при заданном параллельном переносе; полупрямая A_1B_1 и будет искомой.

4. Параллельный перенос переводит точку A в точку A_1 (рис. 9.43). Постройте фигуру, в которую при этом параллельном переносе переходит фигура: а) DEF; б) $MNLP$.

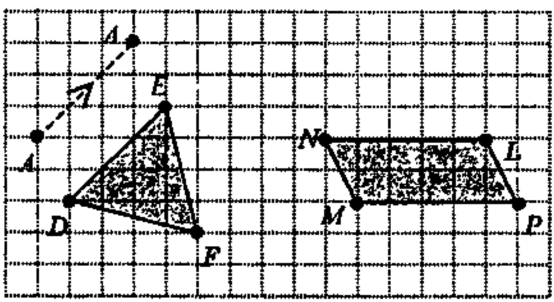


Рис. 9.43

Урок 54

ТЕМА: Существование и единственность параллельного переноса. Сонаправленность полупрямых

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Материал пунктов 88 и 89 рассматривается главным образом как необходимая база для введения векторов. Так, теорема 9.4 (о существовании и единственности параллельного переноса, переводящего точку A в A') является основой для рассмотрения вопросов, связанных с равенством векторов, а сведения об одинаковой и противоположной направленности полупрямых являются вспомогательными для введения понятий одинаково и противоположно направленных векторов. Материал этих пунктов можно изучать в ознакомительном плане. Поскольку вопросы существования и единственности (особенно — существования), как правило, трудны для понимания, целесообразно уделить внимание разъяснению смысла формулировки теоремы 9.4.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

уметь выявлять сонаправленные и противоположно направленные лучи в рассматриваемых конфигурациях.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин.	
2	Изучение нового материала — 15 мин	Теорема о существовании и единственности параллельного переноса, задача № 32
3	Решение задач — 18 мин	Задачи № 30, 31(1), дидактическая задача на сонаправленные и противоположно направленные лучи
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 18–21 (без доказательства). Задачи № 31(2), 33, 34

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 16, 17, решение задач № 27–29.

В ходе проверки решения задачи 27 полезно обратить внимание учащихся на то, что в случае, когда точка C не лежит на прямой AB, отрезки AB и CC_1 лежат на параллельных прямых, в случае, когда точка C лежит на прямой AB, отрезки AB и CC_1 лежат на одной прямой, и в обоих случаях направление от точки C к точке C_1 такое же, как направление от точки A к точке B (рис. 9.44). Это мотивирует введение определения сонаправленных лучей, которое будет рассматриваться на этом уроке.

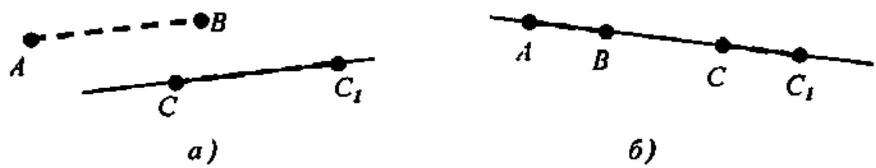


Рис. 9.44

II. Изучение нового материала

1. Для того чтобы пояснить смысл формулировки теоремы 9.4, ее лучше разбить на две части и дать пояснения к каждой из них отдельно.

Каковы бы ни были точки A и A_1, существует один и только один параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A_1.

Существование. Поскольку параллельный перенос определяется с помощью формул $x_1 = x + a$ и $y_1 = y + b$, то смысл первой части теоремы заключается в том, что какие бы мы ни взяли две точки $(x; y)$ и $(x_1; y_1)$, всегда найдутся числа a и b, такие, чтобы указанные выше равенства выполнялись. Эту мысль полезно проиллюстрировать (в том числе с помощью рисунка) при выполнении следующего задания.

Даны точки A(2; 7) и B(5; 3). Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B?

Для решения задачи достаточно увидеть, что абсцисса точки B получается, если к абсциссе точки A прибавить 3, а ордината — если из ординаты точки A вычесть 4, таким образом, существует параллельный перенос, заданный формулами $x_1 = x + 3$ и $y_1 = y - 4$, который точку A переводит в точку B. Здесь можно заметить, что числа 3 и -4 получаются, если из координаты точки B вычесть соответствующую координату точки A. Точно так же в общем случае, если даны точки $M(x;\ y)$ и $M_1(x_1;\ y_1)$, то всегда существуют числа a и b такие, что $a = x_1 - x$ и $b = y_1 - y$, а значит, параллельный перенос, заданный формулами $x_1 = x + a$ и $y_1 = y + b$, переводит точку M в точку M_1.

Доказательство существования параллельного переноса в общем виде, приведенное в тексте учебника, можно не проводить, сообщив учащимся, что доказательство имеется в учебнике. Его можно также предложить желающим учащимся изучить самостоятельно.

Единственность. Смысл этой части теоремы заключается в том, что рассматривается параллельный перенос, заданный двумя точками A и A_1. Ставится вопрос: перейдет ли произвольная точка X в единственную точку X_1 или возможно неоднозначное построение этой точки? Теорема утверждает, что такая точка будет единственной.

Для доказательства нужно вспомнить способ построения образа точки X при параллельном переносе, который заключается в построении точки O — середины отрезка A_1X и затем откладывании отрезка, равного отрезку AO, на продолжении отрезка AO за точку O (рис.9.45).

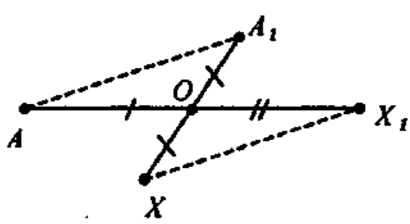


Рис. 9.45

На каждом этапе проводимого построения подчеркиваем, что его результат единственно возможный. Таким образом, учащиеся убеждаются, что параллельный перенос, переводящий точку A в A_1, переводит произвольную точку X в единственную, вполне определенную точку X_1.

После рассмотрения теоремы 9.4 полезно сделать следующее резюме: параллельный перенос может быть задан двумя способами: координатными формулами или парой точек A и A_1. Во втором случае иногда говорят, что параллельный перенос задан отрезком AA_1, причем, поскольку важно, что точка A — исходная, а точка A_1 — это точка, в которую она переходит, то говорят, что параллельный перенос задан «направленным» отрезком.

2. Введение определения одинаково направленных полупрямых целесообразно сопроводить рис. 9.46. Обратив внимание учащихся на то, что все три фигурки на рисунке движутся в одном направлении, можно предложить им указать пары полупрямых, которые, по их мнению, разумно называть одинаково направленными (AB и BC; AB и DE; BC и DE; BA и CA; BA и ED; CA и ED; CB и ED).

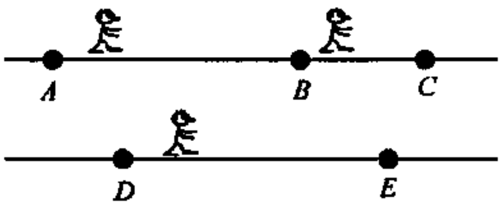


Рис. 9.46

Затем вводим формальное определение.

Две полупрямые называются одинаково направленными или сонаправленными, если они совмещаются параллельным переносом, т. е. существует параллельный перенос, который переводит одну полупрямую в другую.

Можно снова обратиться к рисунку 9.43 и предложить учащимися ответить на вопросы:

а) Какой параллельный перенос совместит полупрямые AB и DE? (Параллельный перенос, переводящий точку A в точку D.)

б) Какой параллельный перенос совместит полупрямые AB и BC? (Параллельный перенос, переводящий точку A в точку B.)

Следует отметить, что согласно свойству параллельного переноса одинаково направленные лучи лежат на параллельных прямых либо на одной и той же прямой.

Вводим определения противоположно направленных полупрямых:

Две полупрямые называются противоположно направленными, если каждая из них одинаково направлена с полупрямой, дополнительной к другой.

Полезно еще раз обратиться к рисунку 9.43 с тем, чтобы учащиеся указали на нем полупрямые, противоположно направленные с полупрямой AB. Следует обратить внимание учащихся на то, что противоположно направленные лучи (так же как и одинаково направленные) лежат на параллельных прямых либо на одной и той же прямой.

3. Утверждение о транзитивности сонаправленности полупрямых достаточно очевидно для учащихся, его формальное доказательство можно на уроке не рассматривать, предложив, как и теорему о существовании и единственности параллельного переноса, для самостоятельного изучения желающим учащимся.

4. Рассматривая задачу 32, решение которой дано в учебном пособии, полезно подчеркнуть, что ее результат дает признак, по которому можно выявлять сонаправленные полупрямые, не прибегая непосредственно к определению (через параллельный перенос).

Прямые AB и CD параллельны. Точки A и D лежат по одну сторону от секущей BC. Докажите, что лучи BA и CD одинаково направлены.

Решение.

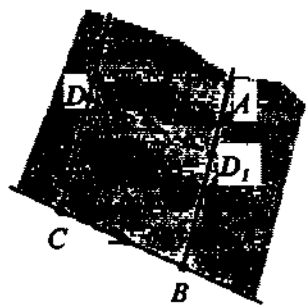


Рис. 9.47

1) Рассмотрим параллельный перенос, при котором $C \to B$. При этом переносе $D \to D_1$ (рис. 9.47).

2) Прямая CD перейдет в параллельную ей прямую BD_1, т.е. в прямую BA.

3) Т.к. $DD_1 \parallel CB$, то точка D_1 лежит относительно прямой CB в той же полуплоскости, что и точка D, а значит, и точка A. Следовательно, луч BD_1 совпадает с лучом BA, тогда рассмотренный параллельный перенос переводит луч CD в луч BA, т.е. эти лучи сонаправлены.

III. Решение задач

Решить задачу № 30

Решение.

1) $(1; 1) \to (1 + a; 1 + b)$, значит, $1 + a = -1$; $1 + b = 0$, т.е. $a = -2$, $b = -1$.

2) $(0; 0) \to (0 + a; 0 + b)$, т.е. $(0; 0) \to (-2; -1)$.

Решить задачу № 31(1)

Решение.

1) Т.к. параллельный перенос задается формулами $x_1 = x + a$ и $y_1 = y + b$, то должны выполняться равенства: $3 = 1 + a$, $4 = 2 + b$ и $-1 = 0 + a$, $0 = 1 + b$.

2) Из первых двух равенств следует, что $a = 2$, $b = 2$, но $-1 \neq 0 + 2$, $0 \neq 1 + 2$.

Ответ: не существует.

Решить задачу

На рисунке 9.48 DE и EF — средние линии треугольника ABC. Укажите, какие лучи с началом в отмеченных точках а) сонаправлены с лучом DB; б) противоположно направлены с лучом AC.

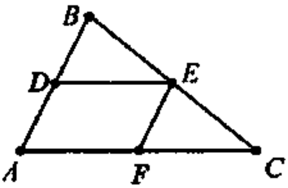


Рис. 9.48

Решение.

а) С лучом DB сонаправлен луч AD (или, что то же самое, луч AB), лежащий с ним на одной прямой, а т.к. прямые AD и FE параллельны и точки D и E лежат по одну сторону от секущей AF, то с лучом AD сонаправлен луч FE.

б) Луч AC противоположно направлен с лучом CA и с лучом FA, лежащими с ним на одной прямой, а т.к. прямые AC и DE параллельны и точки A и D лежат по одну сторону от секущей CE, то луч ED сонаправлен с лучом CA, *значит, противоположно направлен с лучом AC.*

Ответ: а) AD, FE; б) CA, FA, ED.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 18–21 (без доказательства). Решить задачи № 31(2), 33, 34.

Указания к задачам

31(2). Т.к. параллельный перенос задается формулами $x_1 = x + a$ и $y_1 = y + b$, то должны выполняться равенства: $2 + a = 1$, $-1 + b = 0$, и $0 = -1 + a$, $4 = 3 + b$. Из первых двух равенств следует, что $a = -1$, $b = 1$, но $0 \neq -1 - 1$. Значит, такого параллельного переноса не существует.

33. Рассмотрим луч CD_1, дополнительный к лучу CD, тогда точка D_1 лежит с точкой D по разные стороны от точки C, т.е. в той полуплоскости относительно прямой BC, что и точка A. Тогда по доказанному в задаче 32 лучи BA и CD_1 сонаправлены, значит, лучи BA и CD противоположно направлены.

34. AB и DC, AD и BC, CD и BA, DA и CB — сонаправленные лучи, AB и CD, BC и DA, DC и BA, AD и CB — противоположно направленные лучи.

Дополнительные задачи

1. Точки A, B, C и D не лежат на одной прямой, лучи AB и CD одинаково направлены, отрезки AB и CD равны. Докажите, что $AC = BD$.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC проведена средняя линия MK, причем $M \in AB$, $K \in CD$. Назовите лучи а) одинаково направленные с лучом BC, б) противоположно направленные с лучом AB.

О т в е т: а) AD, MK; б) BA, MA.

Урок 55

ТЕМА: Равенство фигур

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

В пункте 55 учебника вводится понятие равенства двух произвольных фигур. До сих пор в курсе рассматривались только три вида равных фигур: равные отрезки, равные углы и равные треугольники. Равенство их определялось равенством линейных и градусных мер соответствующих элементов. Здесь же доказывается, что для треугольников (как, впрочем, отрезков и углов) общее понятие равенства равносильно первоначальному определению равенства этих фигур. Таким образом, если какие-нибудь два треугольника равны по одному из признаков равенства, то они переводятся друг в друга движением. Это в дальнейшем используется при доказательстве признаков подобия треугольников.

Доказательство равносильности двух определений равенства треугольников проводится в ознакомительном порядке.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение равных фигур, понимать, что два определения равных треугольников равносильны.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 10 мин	Определение равенства фигур
3	Решение задач — 13 мин	Задачи № 35 (об углах), 37
4	Самостоятельная работа — 10 мин	
5	Домашнее задание — 2 мин	Контрольный вопрос 22, повторить вопрос19. Задачи № 36, 38

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 19 и 21, решение задач № 31(2) устно, 34 устно с выполнением рисунка на доске.

II. Изучение нового материала

1. Перед изложением теоретического материала нужно повторить определения равных отрезков, углов, треугольников, задав учащимся вопросы:

1) *Какие отрезки называются равными?* (Отрезки, которые имеют равные длины.)

2) *Какие углы называются равными?* (Углы, которые имеют равные градусные меры.)

3) *Какие треугольники называются равными?* (Треугольники, у которых все соответствующие стороны и углы равны.)

2. Введем определение, позволяющее говорить о равенстве любых фигур.

Две фигуры называются равными, если они движением переводятся одна в другую.

Предлагаем учащимся сформулировать новые определения равенства отрезков, углов, треугольников:

— ***два отрезка называются равными, если один из них переводится движением в другой;***

— ***два угла называются равными, если один из них переводится движением в другой;***

— ***два треугольника называются равными, если один из них переводится движением в другой.***

Поскольку в математике не может быть двух разных определений одного и того же понятия, то нужно доказать, что определение равенства отрезков (углов, треугольников) через их совмещение движением и прежнее определение равносильны, то есть из одного определения следует другое и обратно.

3. Докажем, что для отрезков эти определения равносильны, т.е. что справедливы два утверждения:

Если существует движение, при котором отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1, то длины отрезков AB и A_1B_1 равны. (Это утверждение справедливо, так как движение сохраняет расстояния между точками.)

Если длины отрезков AB и A_1B_1 равны, то существует движение, которое отрезок AB переводит в отрезок A_1B_1.

(Доказательство этого утверждения составляет часть решения задачи № 35 и является фрагментом доказательства, приведенного в учебнике для треугольников.)

Доказательство.

Проводим прямую a — серединный перпендикуляр к отрезку AA_1 и строим точку M, симметричную точке B относительно прямой a. Тогда отрезок A_1M симметричен отрезку AB относительно прямой a, откуда длины отрезков AB и A_1M равны.

Проводим прямую b — серединный перпендикуляр к отрезку MB_1. Он пройдет через точку A_1, так как она равноудалена от концов отрезка Тогда отрезок A_1B_1 симметричен отрезку A_1M относительно прямой b (рис. 9.49). Таким образом, отрезок A_1B_1 получен из отрезка AB двумя последовательными движениями (симметриями относительно прямой), то есть получен из отрезка AB движением, что и требовалось доказать.

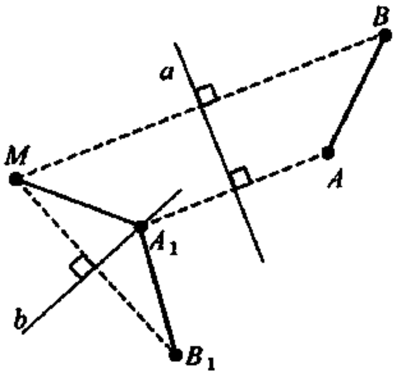


Рис. 9.49

3. Докажем, что для треугольников старое и новое определения также равносильны, т. е. что справедливы два утверждения:

Если существует движение, при котором треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$ ($A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$), то верны равенства градусных мер углов и длин сторон: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. (Это утверждение справедливо, так как движение сохраняет расстояния и углы.)

Если верны равенства градусных мер углов и длин сторон: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, то существует движение, при котором треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$, причем точка A переходит в A_1, B — в B_1 и C — в C_1.

Доказательство состоит в том, что к одному из данных треугольников применяются последовательно преобразования симметрии относительно прямой, пока в результате не получится второй треугольник. Это доказательство в слабом классе можно провести в ознакомительном плане, используя заготовленные заранее чертежи (см. рис. 9.50–9.52), а в более сильном классе провести в форме практической работы с тщательным выполнением всех построений, отмечая на чертеже равные отрезки. Работа одновременно проводится на доске и в тетрадях.

1) Строим прямую a — серединный перпендикуляр к отрезку AA_1. Симметрия относительно a переводит ΔABC в $\Delta A_1B_2C_2$. При этом $A_1B_2 = AB = A_1B_1$ (рис. 9.50).

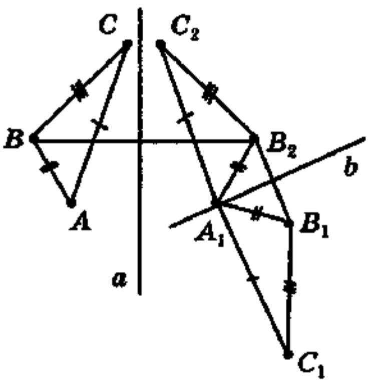


Рис. 9.50

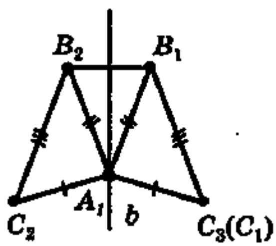


Рис. 9.51

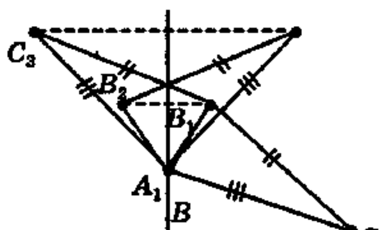


Рис. 9.52

2) Прямая b, проведенная через A_1 и середину отрезка B_1B_2, перпендикулярна B_1B_2 (по свойству медианы в равнобедренном $\Delta A_1B_1B_2$). Симметрия относительно прямой b переводит $\Delta A_1B_2C_2$ в $\Delta A_1B_1C_3$ (рис. 9.51 и 9.52).

Доказательство совпадения точек C_1 и C_3 (в случае расположения треугольников на рис. 9.60) приведено в тексте учебного пособия. Если в результате выполнения работы в классе получилось расположение треугольников, как на рисунке 9.61, то надо применить еще симметрию относительно прямой A_1B_1.

III. Решение задач

Решить задачу № 35 (об углах)

Докажите, что углы с равной градусной мерой совмещаются движением.

Решение.

Пусть $\angle ABC$ и $\angle A_1B_1C_1$ имеют одинаковую градусную меру. Отложим на сторонах BA, BC, B_1A_1 и B_1C_1 равные отрезки (рис. 9.53). Тогда по двум сторонам и углу между ними $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, а значит, существует движение, при котором эти треугольники совмещаются, причем $A \to A_1$, $B \to B_1$ и $C \to C_1$. Тогда при этом движении $\angle ABC \to \angle A_1B_1C_1$.

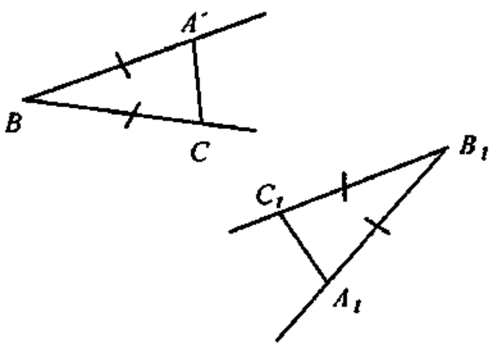


Рис. 9.53

Решить задачу № 37

Дано: $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, — ромбы. $AC = A_1C_1$, $BD = B_1D_1$ (рис. 9.54).

Доказать: $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.

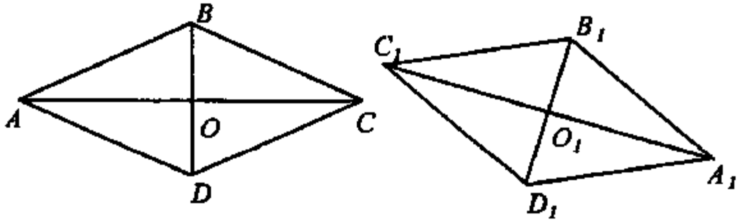


Рис. 9.54

Р е ш е н и е.

Так как $AC = A_1C_1$, то существует движение, переводящее полупрямую AC в полупрямую A_1C_1, причем точку A — в точку A_1 и точку C — в точку C_1. Диагонали ромба, пересекаясь, делятся пополам, а движение сохраняет расстояния, поэтому середина AC — точка O перейдет в середину A_1C_1 — точку O_1. Диагонали ромба перпендикулярны, а так как при движении сохраняются углы и расстояния, то либо OB перейдет в O_1B_1, а OD в O_1D_1, либо OB перейдет в O_1D_1, а OD — в O_1B_1. В любом случае ромб $ABCD$ перейдет в ромб $A_1B_1C_1D_1$.

Примечание. Можно решить задачу указанием двух последовательно выполненных движений, переводящих эти ромбы друг в друга; например, параллельный перенос ромба $ABCD$, переводящий точку O в точку O_1, а затем поворот на угол COC_2, где C_2 точка, в которую перешла точка C при указанном параллельном переносе.

IV. Самостоятельная работа

1-й вариант

Треугольник ABC на рисунке 9.55 равнобедренный и прямоугольный.

1. Выполните поворот треугольника относительно точки A на 45° против часовой стрелки.

2. Выполните параллельный перенос треугольника, при котором вершина C переходит в середину катета AC.

О т в е т: рис. 9.56.

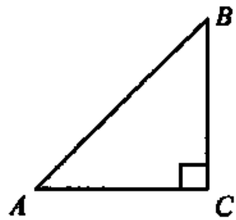


Рис. 9.55

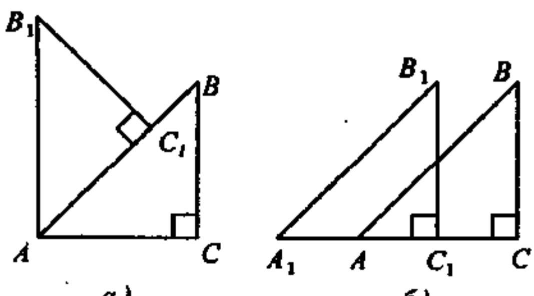


Рис. 9.56

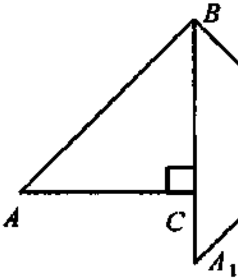
2-й вариант

Треугольник ABC на рисунке 9.55 равнобедренный и прямоугольный.

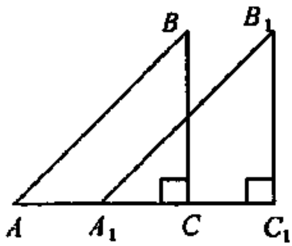
1. Выполните поворот треугольника относительно точки B на 45° против часовой стрелки.

2. Выполните параллельный перенос треугольника, при котором вершина A переходит в середину катета AC.

О т в е т: рис. 9.57.



а)



б)

Рис. 9.57

V. Домашнее задание

Ответить на контрольный вопрос 22, повторить вопрос 19. Решить задачи № 36, 38.

Указания к задачам

36. Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по первому признаку, а значит, существует движение, переводящее ΔABD в $\Delta A_1B_1D_1$. При этом A переходит в A_1, B — в B_1, D — в D_1. Проверим, в какую точку переходит точка C. Пусть диагонали данных параллелограммов пересекаются в точках O и O_1. Так как движение сохраняет расстояния между точками, то O переходит в O_1, тогда луч AO переходит в луч A_1O_1 и, еще раз используя свойство сохранения расстояния, получаем, что точка C переходит в точку C_1, т.е. параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ совмещаются движением.

38. Обозначим центры окружностей через O и O_1, а их радиусы через R. Рассмотрим параллельный перенос, переводящий

точку O в точку O_1. Произвольная точка X первой окружности расположена на расстоянии R от точки O. Следовательно, по определению движения точка X_1, в которую переходит точка X, должна находиться на расстоянии R от точки O_1, т. е. принадлежать второй окружности. Кроме того, любая точка второй окружности при этом параллельном переносе не может быть получена из точки, не принадлежащей первой окружности, иначе не будет выполняться свойство сохранения расстояния между точками. Таким образом, при данном движении окружности совместились.

§ 10. Векторы на плоскости

Понятие вектора — одно из основных понятий в современной математике. На нем строятся многие разделы точных наук. В данном же курсе векторы являются в основном одним из объектов изучения. В учебнике о них даются лишь знания, нужные, чтобы наметить связи между школьными курсами математики и физики.

Понятие «вектор» вводится в учебнике как направленный отрезок. Слово «вектор» происходит от латинского глагола vehere, который в переводе на русский язык означает «тянуть». Образно говоря, конец вектора, обозначаемый, например, латинской буквой B, тянет за собой начало вектора, обозначаемое латинской буквой A. (Есть, правда, вектор, который не слишком отвечает принятому определению. Это нуль-вектор. У него нет ни направления, ни длины.) Такое введение понятия вектора согласуется с принятым в школьном курсе физики представлением о нем (в физике векторными величинами, как известно, являются скорость, ускорение, сила, момент силы и т. п.). Оно удобно также и для применения сведений о векторах в решении геометрических задач.

В основном для нужд физики возникло и развилось в девятнадцатом веке векторное исчисление двух и трех измерений как самостоятельная математическая дисциплина. При этом предметом изучения векторного исчисления являются операции над векторами.

В сознании учащихся переход к новым объектам изучения не всегда проходит гладко. При изучении материала параграфа у учащихся должны быть сформированы представления о векторах как о новых объектах, которые имеют и общие свойства с объектами, изучавшимися ранее, и много различий. Так, например, для сложения векторов, как и для чисел, справедливы переместительный и сочетательный законы, однако сами операции сложения и вычитания векторов осуществляются по специфическим правилам.

Основная цель изучения темы — познакомить учащихся с элементами векторной алгебры и их применением для решения геометрических задач, сформировать умения производить операции над векторами. Основное внимание следует уделить формированию практических умений. Теоретический материал, связанный с обоснованием свойств изучаемых понятий и выводом формул, может изучаться в ознакомительном плане, т. е. без требования усвоения доказательств. Многие доказательства можно рекомендовать заменить либо разъяснением формулировок, либо рассмотрением утверждения не в общем виде, а на конкретном примере.

В результате изучения материала параграфа учащиеся должны:

знать определения вектора, абсолютной величины вектора и координат вектора, формулу для вычисления абсолютной величины вектора, определение равных векторов и свойство координат равных векторов; правила треугольника и параллелограмма для сложения двух векторов, определение и правило построения произведения вектора на число; формулы для вычисления скалярного произведения двух векторов, вытекающие из его определения и теоремы 10.3, и признак перпендикулярности векторов;

уметь распознавать равные векторы в геометрических фигурах, откладывать от заданной точки вектор, равный данному, вычислять координаты вектора по координатам его начала и конца, откладывать вектор с заданными координатами от любой точки координатной плоскости; вычислять длину вектора; находить координаты суммы и разности векторов, заданных координатами, распознавать на чертеже и строить вектор, равный сумме и разности двух векторов, заданных геометрически, находить координаты вектора $\lambda\overline{a}$ $(\lambda \neq 0)$ по координатам вектора $\overline{a}$; строить вектор $\lambda\overline{a}$ по заданному вектору $\overline{a}$; распознавать коллинеарные векторы, заданные в геометрической и координатной формах; вычислять скалярное произведение векторов, косинус угла между векторами, заданными своими координатами, выявлять перпендикулярные векторы и обратно: применять свойство перпендикулярных векторов.

Урок 57

ТЕМА: Абсолютная величина и направление вектора. Равенство векторов

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

На уроке рассматриваются две основные характеристики вектора — его абсолютная величина (модуль) и направление. Определение равенства векторов, которое использует понятие параллельного переноса, как правило, в решении задач не применяется. Вместо него обычно используют утверждения о том, что векторы равны тогда и только тогда, когда одинаково направлены и имеют равные длины (рассматривается на этом уроке) или когда имеют равные соответствующие координаты (рассматривается на следующем уроке).

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение вектора, абсолютной величины вектора, единичного вектора, определение равных векторов;

уметь применять определение равенства векторов и его следствие для распознавания равных векторов и вывода на основании равенства векторов о параллельности и равенстве отрезков в геометрических фигурах, откладывать от заданной точки вектор, равный данному.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 2 мин	
2	Изучение нового материала — 15 мин	Определение вектора, понятия направления и длины вектора, одинаково направленных и противоположно направленных векторов, равных векторов, единичных векторов

№	Этап урока	Содержание работы
3	Решение задач — 18 мин	Задача № 2, дидактические задачи на закрепление изученного материала
4	Домашнее задание — 5 мин	Контрольные вопросы 1–7 (без доказательства). Задачи № 1, 3

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 19, 22.

II. Изучение нового материала

1. Сообщаем учащимся определение вектора и даем к нему пояснения.

Вектором называют направленный отрезок.

Выполняем рисунок 10.1 и проводим следующие рассуждения.

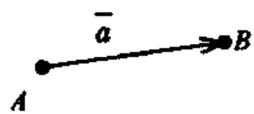


Рис. 10.1

Любой отрезок имеет два конца, и в обозначении отрезка все равно какой конец на каком месте стоит. Например, на рисунке 10.1 отрезок можно назвать AB или BA. Но вектор — это направленный отрезок, у него есть начало (на нашем рисунке A) и конец (на нашем рисунке B).

На чертеже направление показываем, рисуя стрелку (в конце вектора), а в обозначении на первом месте записываем начало, на втором — конец вектора и рисуем над этими буквами стрелку или черточку. (В дальнейшем будем использовать обозначения с черточкой: $\overline{AB}$).

Векторы можно, так же как и отрезки, обозначать одной буквой, но тоже с черточкой: $\overline{a}$.

2. Вводим следующие определения.

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называют одинаково направленными, если полупрямые AB и CD одинаково направлены.

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называют противоположно направленными, если полупрямые AB и CD противоположно направлены.

Абсолютной величиной (или модулем) вектора называется длина отрезка.

Вектор называется единичным, если его абсолютная величина равна единице.

Вектор, у которого начало совпадает с концом, называется нулевым вектором $\overline{0}$, абсолютная величина нулевого вектора равна нулю.

Для закрепления введенных понятий учащимся предлагается задание.

На рисунке (рис. 10.2) ABCD — трапеция. Укажите, какие из утверждений верны:

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ имеют общее начало.

Векторы $\overline{BC}$ и $\overline{BD}$ имеют общий конец.

Векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ одинаково направлены.

Векторы $\overline{BA}$ и $\overline{CD}$ противоположно направлены.

Векторы $\overline{AO}$ и $\overline{CA}$ противоположно направлены.

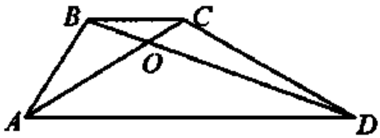


Рис. 10.2

Для записей при решении задач можно использовать обозначения:

$\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ — векторы сонаправлены; $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ — векторы противоположно направлены.

3. Вводим определение равных векторов и доказываем теорему о равных векторах.

Два вектора называют равными, если они совмещаются параллельным переносом.

Другими словами, $\overline{AB} = \overline{CD}$, если существует параллельный перенос, при котором $A \to C$, $B \to D$.

Равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине.

И обратно:

Если векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине, то они равны.

Справедливость первого утверждения следует из определения, поскольку при параллельном переносе полупрямая переходит в сонаправленную полупрямую и сохраняются расстояния. Докажем обратное утверждение.

1) Пусть векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ одинаково направлены и равны по абсолютной величине, т.е. лучи AB и CD сонаправлены и длины отрезков AB и CD равны (рис. 10.3).

2) Рассмотрим параллельный перенос, при котором $A \to C$. При этом переносе луч AB переходит в луч CD (т.к. лучи AB и CD сонаправлены) и точка B переходит в точку D (т.к. длины отрезков AB и CD равны). Значит, $\overline{AB} \to \overline{CD}$, т. е. $\overline{AB} = \overline{CD}$.

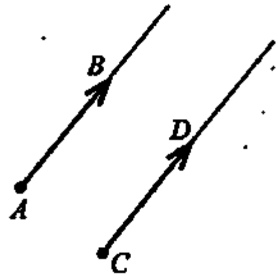


Рис. 10.3

Рассмотренные два утверждения можно объединить в одно:

Равные векторы — это сонаправленные векторы, имеющие одинаковую длину.

3. Таким образом, если дан вектор $\overline{AB}$, то от любой точки плоскости можно отложить равный ему вектор. Для этого вектор $\overline{AB}$ нужно подвергнуть параллельному переносу, при котором точка A перейдет в эту точку (рис. 10.4).

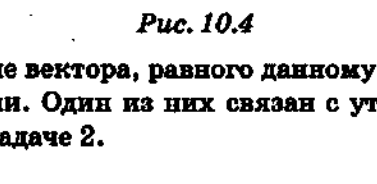


Рис. 10.4

Само построение вектора, равного данному, можно выполнять разными способами. Один из них связан с утверждением, сформулированным в задаче 2.

III. Решение задач

Решить задачу № 2

Решение этой задачи приведено в тексте учебника. Можно задачу решить несколько проще, если использовать результат задачи № 32 из § 8.

Р е ш е н и е.

1) Лучи AB и DC сонаправлены, т.к. $AB \parallel DC$ и точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC.

2) $AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма.

3) $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ сонаправлены и их длины равны, значит, $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Решить задачу

Четырехугольник ABCD — квадрат (рис. 10.5) со стороной 10 см.

1) Укажите верные утверждения: а) $\overline{AB} = \overline{CD}$; б) $\overline{AB} = \overline{DC}$; в) $\overline{AC} = \overline{BD}$; г) $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$; д) $\overline{AO} = \overline{OC}$; е) $|\overline{BO}| = |\overline{OD}|$.

2) Найдите абсолютные величины векторов $\overline{AO}$ и $\overline{BD}$.

О т в е т: 1) б, г, д, е; 2) $5\sqrt{2}$ см и $10\sqrt{2}$ см.

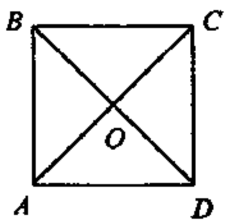


Рис. 10.5

Решить задачу

Отметьте в координатной плоскости точку A(4; 3). Постройте вектор $\overline{OA}$. Отложите от точки A вектор $\overline{AB}$, равный вектору $\overline{OA}$. Отложите от точки O вектор $\overline{OC}$, противоположный вектору $\overline{OA}$. Укажите координаты точек B и C.

Р е ш е н и е.

1) Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{OC}$ лежат на одной прямой (рис. 10.6).

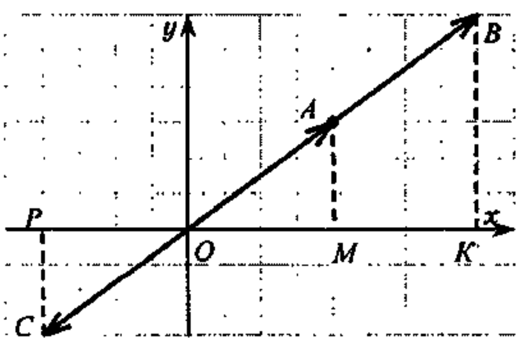


Рис. 10.6

2) $\triangle OBK$: AM — средняя линия (по теореме Фалеса), тогда $OK = 2\,OM$, $BK = 2\,AM$. Т.к. $\overline{AB}$ отложен в том же направлении, что и $\overline{OA}$, то координаты точки B положительны.

3) $\triangle OCP = \triangle OAM$ (по гипотенузе и острому углу), тогда $OP = OM$ и $CP = AM$. Т.к. $\overline{OC}$ отложен в направлении, противоположном вектору $\overline{OA}$, то координаты точки C отрицательны.

Ответ: $B(8; 6)$, $C(-4; -3)$.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 1–7 (без доказательства). Повторить вопрос 5 из §8 (без доказательства). Решить задачи № 1, 3.

Указания к задачам

1. Одинаково направлены: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$; вектор $\overline{BA}$ противоположно направлен с векторами $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ (рис. 10.7).

Рис. 10.7

3. В случае 1) переносимый вектор $\overline{AB}$ «скользит» по прямой AB; в случае 2) он перемещается на противоположную сторону параллелограмма (рис. 10.8).

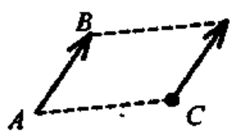


Рис. 10.8

Дополнительные задачи

1. На рисунке 10.9 в равностороннем треугольнике ABC со стороной 4 см проведены средние линии DE и EF. Укажите:

а) векторы, одинаково направленные с вектором $\overline{DE}$;

б) векторы, противоположно направленные вектору $\overline{CB}$;

в) векторы, равные вектору $\overline{AD}$;

г) векторы, противоположные вектору $\overline{AD}$;

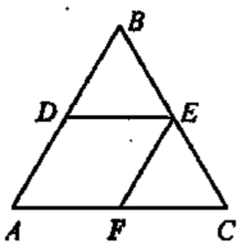


Рис. 10.9

д) векторы, равные по модулю вектору $\overline{AB}$;

е) абсолютную величину вектора $\overline{EF}$.

Ответ: а) $\overline{AF}$, $\overline{FC}$, $\overline{AC}$; б) $\overline{EC}$, $\overline{BE}$, $\overline{BC}$; в) $\overline{DB}$, $\overline{FE}$; г) $\overline{DA}$, $\overline{BD}$, $\overline{EF}$; д) $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{CB}$, $\overline{CA}$, $\overline{AC}$; е) $\left|\overline{EF}\right| = AB : 2 = 2$ см.

2. Дан треугольник ABC. От точки B отложите векторы, равные соответственно векторам $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CA}$, $\overline{CB}$.

Ответ: $\overline{BN} = \overline{AB}$, $\overline{BP} = \overline{AC}$, $\overline{BK} = \overline{CA}$, $\overline{BM} = \overline{CB}$ (рис. 10.10).

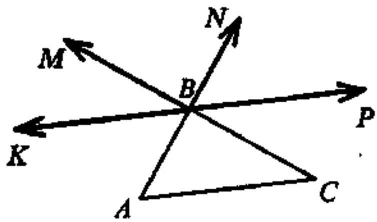


Рис. 10.10

Урок 58

ТЕМА: Координаты вектора

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение координат вектора и свойство координат равных векторов, формулу для вычисления абсолютной величины вектора;

уметь вычислять координаты вектора по координатам его начала и конца, откладывать вектор с заданными координатами от любой точки координатной плоскости; вычислять длину вектора, применять в решении задач условие равенства векторов.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 18 мин	Определение координат вектора, равенство векторов, заданных координатами, формула для вычисления абсолютной величины вектора
3	Решение задач — 15 мин	Задачи № 5(часть 1), 7, дидактические задачи на закрепление изученного материала
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 8, 9. Задачи № 4, 5(часть 2), 6

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 1–7 (без доказательства), решение задач № 1, 3.

II. Изучение нового материала

1. Определение координат вектора полезно проиллюстрировать рисунком (рис. 10.11).

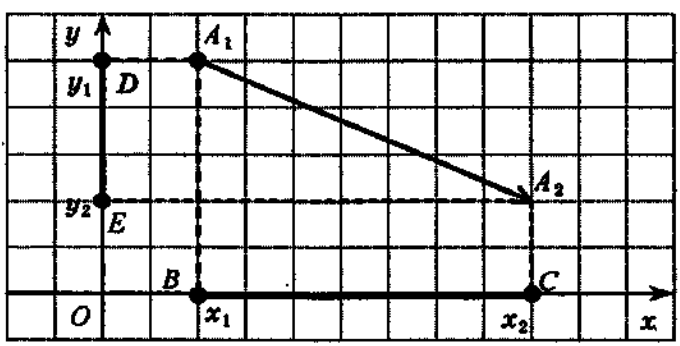


Рис. 10.11

Пусть у вектора $\overline{a}$ известны координаты начала A_1 и конца A_2: $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$.

Тогда ***координатами вектора называют числа***: $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Записывают: $\overline{a}$ $(a_1; a_2)$ или $\overline{(a_1; a_2)}$.

Координаты нулевого вектора равны нулю.

На рисунке 10.11 видно, что длины отрезков BC и DE равны $x_2 - x_1$ и $y_1 - y_2$. При этом можно заметить, что направление от B к C совпадает с положительным направлением оси Ox, поэтому $x_2 > x_1$ и тогда $x_2 - x_1 > 0$, а направление от D к E совпадает с отрицательным направлением оси Oy, поэтому $y_2 < y_1$ и тогда $y_2 - y_1 < 0$.

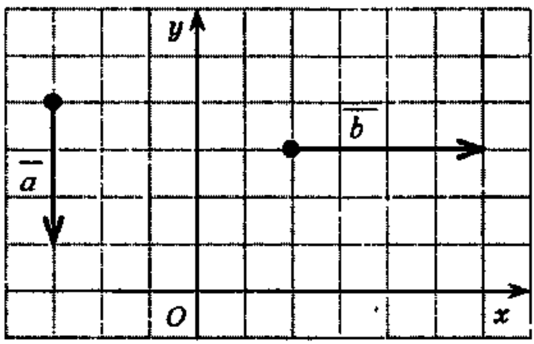


Рис. 10.12

2. Закрепить определение можно с помощью заданий:

Задание 1

Найдите координаты вектора $\overline{KM}$, если известны координаты его начала и конца:

а) $K(3; 2)$, $M(7; 9)$; б) $K(3; 5)$, $M(-4; 2)$; в) $K(-3; 3)$, $M(4; 1)$.

Ответ: а) $\overline{KM}$ $(4; 7)$; б) $\overline{KM}$ $(-7; -3)$; в) $\overline{KM}$ $(7; -2)$.

Задание 2

Даны точки $M(2; 5)$, $K(-3; 6)$, $N(4; -7)$. Запишите координаты векторов $\overline{OM}$, $\overline{OK}$ и $\overline{ON}$, если O — начало координат,

Ответ: $\overline{OM}$ $(2; 5)$, $\overline{OK}$ $(-3; 6)$, $\overline{ON}$ $(4; -7)$.

Результат выполнения этого задания можно обобщить: ***если вектор начинается в начале координат, то его координаты совпадают с координатами его конца.***

Задание 3

Запишите координаты вектора, изображенного на рисунке 10.11.

О т в е т: $\overline{A_1A_2}$ (7; –3).

Задание 4

Запишите координаты векторов, изображенных на рисунке 10.12.

О т в е т: $\bar{a}$ (0; –3), $\bar{b}$ (4; 0).

По результату выполнения последнего задания можно предложить учащимся сформулировать и обосновать свойство координат вектора, параллельного оси: ***если вектор параллелен оси абсцисс, то у него ордината равна нулю, а если он параллелен оси ординат, то у него абсцисса равна нулю,*** т.к. в первом случае одинаковы ординаты начала и конца вектора, а во втором — одинаковы абсциссы.

3. Перед введением формулы для вычисления модуля вектора необходимо вспомнить и записать формулу расстояния между двумя точками : $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Затем учащимся предлагается задание:

Задание 5

Пусть у вектора $\bar{a}$ известны координаты начала М и конца К: М (x_1; y_1), К (x_2; y_2).

а) Запишите, чему равны координаты a_1 и a_2 вектора $\overline{MK}$;

б) запишите, чему равна длина отрезка МК;

в) выразите модуль вектора $\overline{MK}$ через его координаты a_1 и a_2.

О т в е т: а) $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$;

б) $MK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; в) $|\overline{MK}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Результат выполнения этого задания обобщается:

абсолютная величина вектора $\bar{a}$ (a_1; a_2) вычисляется по формуле $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Учащимся предлагается записать и запомнить две формулы для вычисления модуля вектора: по координатам вектора и по координатам начала и конца вектора:

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

$$|a| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

4. Перед рассмотрением теоремы о равных векторах нужно вспомнить определение равенства векторов и записать координаты двух равных векторов.

Два вектора называются равными, если они совмещаются параллельным переносом.

Если даны точки $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ и $\overline{A_1A_2} = \overline{A_1'A_2'}$, то $A_1'(x_1 + c;\ y_1 + d)$, $A_2'(x_2 + c;\ y_2 + d)$.

Теорему сначала формулируем и доказываем как два утверждения:

1) если два вектора равны, то они имеют равные соответствующие координаты;

2) если два вектора имеют равные соответствующие координаты, то они равны.

Доказательство.

1) Пусть $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ и $A_1'(x_1 + c;\ y_1 + d)$, $A_2'(x_2 + c;\ y_2 + d)$. Тогда:

вектор $\overline{A_1A_2}$ имеет координаты $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$;

вектор $\overline{A_1'A_2'}$ имеет координаты $x_2 + c - (x_1 + c) = x_2 - x_1$ и $y_2 + d - (y_1 + d) = y_2 - y_1$,

т. е. векторы $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1'A_2'}$ имеют одинаковые координаты.

2) Пусть $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ и $A_1'(x_1';\ y_1')$, $A_2'(x_2';\ y_2')$, причем, векторы $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1'A_2'}$ имеют равные координаты: $x_2 - x_1 = x_2' - x_1' = a_1$ и $y_2 - y_1 = y_2' - y_1' = a_2$.

Значит, при параллельном переносе, заданном формулами $x' = x + a_1;\ y' = y + a_2$, вектор $\overline{A_1A_2}$ перейдет в вектор $\overline{A_1'A_2'}$, т.е. $\overline{A_1A_2} = \overline{A_1'A_2'}$.

Затем оба утверждения можно свести в одно: ***векторы равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.***

Полезно вспомнить доказанное ранее условие равенства векторов и записать три формулировки:

равные векторы — это векторы, которые совмещаются параллельным переносом;

равные векторы — это сонаправленные векторы, имеющие равные модули;

равные векторы — это векторы, имеющие равные координаты.

III. Решение задач

Решить задачу

Найдите абсолютную величину векторов а) $\overline{m}(5;12)$, ***б)*** $\overline{n}(-6;3)$.

Р е ш е н и е. а) $\left|\overline{m}\right|=\sqrt{5^2+12^2}=13$;

б) $\left|\overline{n}\right|=\sqrt{(-6)^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

Решить задачу

Даны точки $A(-5;0)$, $B(1;3)$, $C(-1;-2)$ ***и*** $D(5;1)$. ***Докажите, что прямые*** AB ***и*** CD ***параллельны.***

Предложите учащимся самостоятельно сделать рисунок.

Р е ш е н и е.

$\overline{AB}(6;3)$, $\overline{CD}(6;3)$, значит, $\overline{AB}=\overline{CD}$, тогда эти векторы совмещаются параллельным переносом. Т.к. прямые AB и CD не совпадают, то $AB \parallel CD$.

Решить задачу № 5(часть 1)

Абсолютная величина вектора $\overline{a}\ (5;m)$ ***равна 13. Найдите*** m.

Решение. $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{5^2+m^2}=13$, отсюда $25+m^2=169$, $m^2=144$, $m=\pm12$.

О т в е т: 12 или −12.

Решить задачу № 7

Решение задачи приведено в тексте учебника. На доске и в тетрадях можно выполнить следующие записи.

Р е ш е н и е.

1) $\overline{AB}(-2; -1)$, $\overline{CD}(x-0; y-1)$.

2) Т.к. $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $x - 0 = -2$, $y - 1 = -1$, откуда $x = -2$, $y = 0$.

О т в е т: $D(-2; 0)$.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 8, 9. Решить задачи № 4, 5 (часть 2), 6.

Указания к задачам

4. Так как начала векторов имеют координаты (0; 0), то координаты векторов равны координатам концов.

О т в е т: (2; 4), (−1; 2), $(c_1; c_2)$.

5. Так как $\left|\overline{b}\right|^2 = n^2 + 24^2 = 25^2$, то $n^2 = 25^2 - 24^2 = (25 - 24)(25 + 24) = 49$, $n = \pm 7$.

О т в е т: 7 или −7.

6. Так как $\overline{AB}(1; -1)$ и $\overline{CD}(1; -1)$, то $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Дополнительные задачи

1. Даны векторы $\overline{AB}(-4; 0)$ и $\overline{BC}(\sqrt{5}; 2)$. Найдите сумму длин отрезков AB и BC.

О т в е т: $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$.

2. Даны точки $A(-5; 1)$, $B(-2; 5)$, $C(-2; -1)$, $D(2; 2)$, $E(-3; 0)$, $F(0; 4)$. Какие из векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ и $\overline{EF}$ а) равны между собой; б) имеют одинаковую длину?

О т в е т: а) Так как $\overline{AB}(3; 4)$ $\overline{AC}(3; -2)$, $\overline{BD}(4; -3)$, $\overline{CD}(4; 3)$, $\overline{EF}(3; 4)$, то $\overline{AB} = \overline{EF}$; б) так как $AB = 5$, $AC = \sqrt{13}$, $BD = 5$, $CD = 5$, $EF = 5$, то $AB = BD = CD = EF$, т.е. равные длины имеют векторы $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ и $\overline{EF}$.

3. Даны точки $A(-2; 1)$, $B(3; 1)$, $C(0; -2)$. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, отложите от начала координат векторы, равные соответственно векторам $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$.

О т в е т: $\overline{AB}(5; 0)$ $\overline{AC}(2; -3)$, $\overline{CB}(3; 3)$.

Урок 59

ТЕМА: Сложение векторов. Сложение сил

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Сложение векторов осуществляется двумя качественно различными способами:

— «геометрическим», когда по определенным правилам (правилу треугольника или правилу параллелограмма) находят сумму геометрических объектов — направленных отрезков;

— «координатным», когда производится сложение соответствующих координат слагаемых векторов.

В учебнике А.В.Погорелова координатный способ задается определением, а геометрические способы появляются в результате доказательства теоремы 10.1 и решения задачи № 11.

Координатный способ прост и легко запоминается учащимися, поскольку с координатами векторов осуществляются те же операции, что и с векторами. Для удобства решения задач полезно показать учащимся, что аналогично выполняются и сложение и вычитание более двух векторов. Из геометрических способов наибольшие затруднения вызывает вычитание векторов. Наряду с рассматриваемым в учебнике правилом можно показать ученикам, как решать задачи на вычитание векторов, применяя не это правило, а другие приемы, например, как в решении задачи № 11, отталкиваясь от сложения векторов. После введения умножения вектора на число и понятия противоположного вектора можно заменять вычитание вектора сложением с противоположным вектором.

Материал, связанный со сложением сил, направленных под углом друг к другу, не относится к обязательному для изучения материалу. В курсе физики он, как правило, рассматривается в 9 или 10 классе. Поэтому его можно изучать в ознакомительном плане: изложить сведения о сложении сил, но соответствующих умений не отрабатывать. С целью экономии учебного времени можно весь материал, относящийся к разложению векторов по двум неколлинеарным векторам или по двум направлениям (из пунктов 95, 97 и 99), изучать на одном уроке в конце темы.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать **определения, правила треугольника и параллелограмма для сложения двух векторов;**

уметь **находить координаты суммы и разности векторов, заданных координатами, распознавать на чертеже и строить вектор, равный сумме и разности двух векторов, заданных геометрически.**

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 15 мин	Сумма и разность двух векторов, правила треугольника и параллелограмма
3	Решение задач — 18 мин	Задачи № 8(1), 10(1), 9(2, 3), 13(1)
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 10-16 (без доказательства). Задачи № 8(2), 9(1, 4), 10(2), 14(1)

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 8, 9, решение задач № 5(часть 2), 6 (устно). При проверке задачи № 5 полезно выписать на доске выкладки и показать удобный способ вычислений (см. указания к задачам).

II. Изучение нового материала

1. Вводим определения суммы и разности векторов.

Суммой векторов $\overline{a}$ ***и*** $\overline{b}$ ***с координатами*** a_1, a_2 ***и*** b_1, b_2 ***называется вектор*** $\overline{c}$ ***с координатами*** $a_1 + b_1, a_2 + b_2$.

Разностью векторов $\overline{a}$ $(a_1; a_2)$ и $\overline{b}$ $(b_1; b_2)$ называется такой вектор $\overline{c}$ $(c_1; c_2)$, который в сумме с вектором $\overline{b}$ дает вектор $\overline{a}$, откуда $c_1 = a_1 - b_1$, $c_2 = a_2 - b_2$.

Полезно выполнить краткую запись «в столбик» и рекомендовать учащимся при решении задач аналогичным образом записывать векторы, которые складываются или вычитаются, чтобы избежать ошибок.

$$+\begin{array}{l}\overline{a}(a_1;a_2)\\ \underline{\overline{b}(b_1;b_2)}\\ \overline{c}\,(a_1+b_1;\,a_2+b_2)\end{array}\qquad\qquad -\begin{array}{l}\overline{a}(a_1;a_2)\\ \underline{\overline{b}(b_1;b_2)}\\ \overline{c}\,(a_1-b_1;\,a_2-b_2)\end{array}$$

Для закрепления введенных правил учащимся предлагаются следующие задания.

Задание 1

Найдите координаты суммы векторов: а) $\overline{a}$ (3; –2) и $\overline{b}$ (5; –1); б) $\overline{m}$ (–1; 7) и $\overline{n}$ (4; –2).

Ответ: а) 8 и –3; б) 3 и 5.

Задание 2

Найдите координаты разности векторов: а) $\overline{a}$ (3; –2) и $\overline{b}$ (5; –1); б) $\overline{m}$ (–1; 7) и $\overline{n}$ (4; –2).

Ответ: а) –2 и –1; б) –5 и 9.

2. Законы сложения векторов можно дать без доказательства, пояснив, что для векторов справедливы такие же законы сложения, как и для чисел, поскольку сложение векторов сводится к сложению их координат, т.е. чисел. На доске записываем:

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a},$$

$$\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}.$$

3. Рассматриваем правила сложения векторов, заданных геометрически, т. е. не координатами, а точками, являющимися началом и концом вектора.

Каковы бы ни были точки A, B, C, имеет место векторное равенство

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

На рисунке (рис. 10.13) показываем, что в данной формулировке речь идет о таком случае расположения векторов, когда второй вектор отложен от конца первого вектора. ***Их суммой тогда является вектор, который исходит из начала первого и кончается в конце второго вектора***, т.е. как бы заменяет путь по двум складывающимся векторам коротким путем из начала в конец.

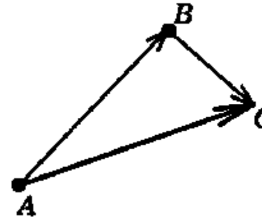


Рис. 10.13

Доказательство можно записать в следующем виде.

Пусть даны точки $A\ (a_1;\ a_2)$, $B\ (b_1;\ b_2)$, $C\ (c_1;\ c_2)$, тогда

$$+\begin{array}{l}\overline{AB}\left(b_1-a_1;b_2-a_2\right)\\ \overline{BC}\left(c_1-b_1;c_2-b_2\right)\\ \hline \overline{m}\left(b_1-a_1+c_1-b_1;b_2-a_2+a_1+c_2-b_2\right)\\ \overline{m}\left(c_1-a_1;c_2-a_2\right)=\overline{AC}\end{array}$$

Доказанное правило называется правилом треугольника. Чтобы закрепить его применение, используем задание:

Задание 3

В четырехугольнике ABCD проведены диагонали. Выразите в виде суммы векторов, заданных вершинами четырехугольника, векторы $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$.

Решение (рис. 10.14).

$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$ или $\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}$;

$\overline{BD}=\overline{BA}+\overline{AD}$ или $\overline{BD}=\overline{BC}+\overline{CD}$;

$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}$ или $\overline{BC}=\overline{BA}+\overline{AC}$.

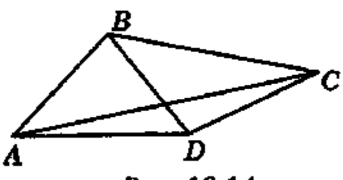


Рис. 10.14

На примере вектора $\overline{BC}$ можно показать, что $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}$ $=$ $=$ $\overline{BA}+\overline{AD}+\overline{DC}$. Таким образом, суммой трех векторов тоже является вектор, который исходит из начала первого и кончается в конце последнего вектора, если второй вектор отложен от конца первого вектора, а третий вектор отложен от конца второго. Можно это правило распространить и на сумму любого числа слагаемых.

Если два вектора отложены от одной точки, то для их сложения можно использовать другое правило: ***их суммой является вектор, который исходит из той же точки и изображается диагональю параллелограмма, построенного на данных векторах.***

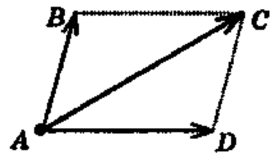


Рис. 10.15

Это правило называется правилом параллелограмма. По рисунку 10.15 показываем, что оно вытекает из правила треугольника: т.к. $\overline{BC} = \overline{AD}$, то $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

4. Для введения правила построения вектора, равного разности двух векторов, можно предложить учащимся задание по рисунку 10.13.

Задание 4

Выразите вектор $\overline{BC}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Решение.

Т.к. $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, то $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$.

Из полученного результата видно, что ***разность векторов, исходящих из одной точки, является вектором, соединяющим конец вычитаемого вектора с концом уменьшаемого.***

5. По рисунку 10.16 следует объяснить, что если на тело действуют силы, которые изображаются векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то оказывается, что в результате к этому телу приложена сила (равнодействующая), которая изображается вектором $\overline{c}$, равным сумме векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Так как силы действуют на одно тело, то векторы исходят из одной точки, и их сумму находят по правилу параллелограмма.

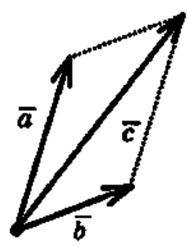


Рис. 10.16

III. Решение задач

Решить задачу № 8(1)

Решение. $\overline{c}\,(1 - 4;\ -4 + 8)$, т.е. $\overline{c}\ (-3;\ 4)$, $|\overline{c}| = \sqrt{9+16} = 5$.

Решить задачу № 10(1)

Решение. $\overline{c}$ (1 + 4; −4 −8), т.е. $\overline{c}$ (5; −12), $|\overline{c}|$ = $= \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$.

Решить задачу № 9(2, 3)

На примере этой задачи необходимо подчеркнуть, что рассмотренные правила сложения векторов применяются только в случаях, когда два вектора начинаются в одной точке (правило параллелограмма) или расположены последовательно, т.е. конец первого вектора совпадает с началом второго (правило треугольника). Если данные векторы расположены по-другому, их можно откладывать от любых точек так, чтобы можно было применить одно из правил сложения.

2) Решение.

Отложим вектор, равный вектору $\overline{AB}$ так, чтобы можно было применить правило треугольника: $\overline{BM} = \overline{AB}$, тогда $\overline{AB} + \overline{CB} = \overline{CB} + \overline{BM} = \overline{CM}$ (рис. 10.17).

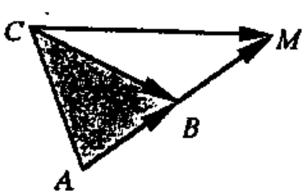


Рис. 10.17

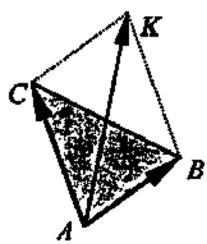


Рис. 10.18

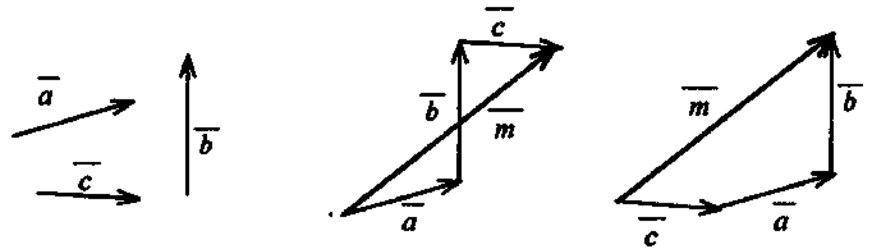
3) Решение.

Данные векторы исходят из одной точки, поэтому удобно для их сложения применить правило параллелограмма: $\overline{AC} + \overline{AB} = \overline{AK}$ (рис. 10.18).

Решить задачу № 13(1)

Решение.

Откладываем последовательно векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и соединяем начало первого с концом последнего вектора (рис. 10.19, *б*).



а) *б)* *в)*

Рис. 10.19

Замечание. На примере этого задания можно показать, что слагаемые можно брать в любом порядке, например, как на рисунке 10.21, *в*.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 10–16 (без доказательства). Решить задачи № 8(2), 9(1, 4), 10(2), 14(1).

Указания к задачам

8(2). $\overline{c}\,(2+4;\,5+3)$, т.е. $\overline{c}\,(6;\,8)$, $|\overline{c}| = \sqrt{36+64} = 10$.

9(1, 4). По правилам треугольника и параллелограмма $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$, $\overline{CA} + \overline{CB} = \overline{CM}$ (рис. 10.20).

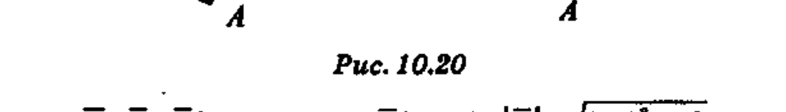


Рис. 10.20

10(2). $\overline{a} - \overline{b} = \overline{c}\,(-2-4;\,7+1) = \overline{c}\,(-6;\,8)$; $|\overline{c}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$.

14. 1). Для доказательства достаточно применить неравенство треугольника.

2) Пусть произвольный вектор $\overline{a} = \overline{CD}$. Отложим от точки D произвольный вектор $\overline{DE} = \overline{b}$. Тогда по неравенству треугольника

$|\overline{CE}| \le |\overline{CD}| + |\overline{DE}|$. Заменив соответственно $\overline{CE}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DE}$ на $\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a}$, $\overline{b}$, получаем требуемое неравенство $|\overline{a}+\overline{b}| \le |\overline{a}| + |\overline{b}|$.

Дополнительные задачи

1. Даны точки $A(2; -1)$, $B(3; 2)$, $C(-3; 4)$, $D(1; 4)$. Найдите сумму векторов $\overline{AB} + \overline{CD}$.

Ответ: $\overline{m}(5; 3)$.

2. Даны точки $A(1; -2)$, $B(2; 3)$, $C(0; 4)$, $D(1; 5)$. Найдите координаты векторов: $\overline{a} = \overline{AB} - \overline{CD}$; $\overline{b} = \overline{AB} - \overline{DC}$.

Ответ: $\overline{a}$ (0; 4); $\overline{b}$ (2; 6).

3. Найдите сумму векторов $\overline{CD} + \overline{CA} + \overline{BC} + \overline{AB} + \overline{EC} + \overline{DE}$.

Ответ: $\overline{0}$

4. Даны вершины $A(2; 3)$ и $D(5; 3)$ параллелограмма $ABCD$ и вектор $\overline{AC}$ (5; 7). Найдите координаты вершины B.

Ответ: $B(4; 10)$.

5. Начертите параллелограмм $ABCD$. Найдите сумму и разность векторов: 1) $\overline{CB}$ и $\overline{CD}$; 2) $\overline{CD}$ и $\overline{BA}$.

Ответ: $\overline{CB} - \overline{CD} = \overline{DB}$; $\overline{CD} - \overline{BA} = \overline{0}$.

Урок 60

ТЕМА: Умножение вектора на число

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Умножение вектора на число, как и сложение векторов, осуществляется в координатной и геометрической формах, причем координатный способ задается определением, а геометрический появляется в результате доказательства теоремы 10.2.

Поскольку умножение вектора на число тесно связано с понятием коллинеарности векторов, рекомендуется определение коллинеарных векторов и утверждение об их свойстве (из пункта 97 учебника) рассмотреть на данном уроке.

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать определение и правило построения произведения вектора на число;

уметь находить координаты вектора $\lambda\overline{a}$ $(\lambda \neq 0)$ по координатам вектора $\overline{a}$; строить вектор $\lambda\overline{a}$ по заданному вектору $\overline{a}$; распознавать коллинеарные векторы, заданные в геометрической и координатной формах.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Изучение нового материала — 15 мин	Произведение вектора на число, определение и свойство коллинеарных векторов
3	Решение задач — 18 мин	Задачи № 17 (устно), 23(1, 3), 24 (устно), дидактические задачи на закрепление изученного материала
4	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 17-20 (без доказательства). Задачи № 19(с построениями), 23(2, 4), 25

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 10–16, решение задач № 8(2), 10(2) и 14(1) — устно, № 9(1, 4) — с выполнением рисунка на доске.

II. Изучение нового материала

1. Из определения, приведенного в учебнике, можно записать лишь равенство

$$\lambda\overline{(a_1;a_2)} = \overline{(a_1;a_2)}\lambda = \overline{(\lambda a_1;\lambda a_2)}\ .$$

Словесную формулировку лучше привести в следующем виде: ***Произведением вектора на число λ называется вектор, координаты которого равны координатам данного вектора, умноженным на число λ.***

Для закрепления введенного определения учащимся предлагаются следующие задания.

1. Дан вектор $\bar{a}$ (4; −2). Найдите координаты векторов $2\bar{a}$, $\frac{1}{2}\bar{a}$, $-2\bar{a}$.

Решение.

1) $2\bar{a} = \overline{(2\cdot 4; 2\cdot(-2))} = \overline{(8;-4)}$;

2) $\frac{1}{2}\bar{a} = \overline{(\frac{1}{2}\cdot 4; \frac{1}{2}\cdot(-2))} = \overline{(2;-1)}$;

3) $-2\bar{a} = \overline{((-2)\cdot 4; (-2)\cdot(-2))} = \overline{(-8;4)}$.

2. Законы умножения вектора на число можно, как и в случае сложения векторов, дать без доказательства, пояснив, что для векторов справедливы такие же законы сложения, как и для чисел, поскольку умножение вектора на число сводится к умножению его координат на это число, т. е. к умножению чисел. На доске записываем:

$$(\lambda+\mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}, \qquad \lambda(\bar{a}+\bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}.$$

3. Теорема 10.2 дает правило построения вектора $\lambda\bar{a}$, если вектор $\bar{a}$ задан геометрически.

Абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$. Направление вектора $\lambda\bar{a}$ при $\bar{a}\neq 0$ совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $\lambda < 0$.

Доказательство теоремы можно в классе не проводить и не требовать ее воспроизведения от учащихся. Но формулировку следует пояснить более подробно и проиллюстрировать конкретными примерами с выполнением рисунков.

Поскольку известно, что произведение любого числа на нулевой вектор равно нулевому вектору, то все дальнейшие рассуждения будем проводить для ненулевых векторов.

1) Если вектор $\overline{a}$ умножить на число λ, то получится вектор, длина которого равна длине вектора , умноженной на число $|\lambda|$.

2) Если число λ положительно, то получится вектор, сонаправленный с вектором $\overline{a}$, если число λ отрицательно, то получится вектор, противоположно направленный с вектором $\overline{a}$.

3) Так как сонаправленные и противоположно направленные векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то в результате умножения вектора на число получается вектор, который лежит на одной прямой или на параллельных прямых с исходным вектором.

Вводим определение коллинеарных векторов и делаем вывод относительно векторов $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$:

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Таким образом, векторы $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$ всегда коллинеарны.

Например, если дан вектор $\overline{a}$ (рис. 10.21), то вектор $3\overline{a}$ сонаправлен с вектором $\overline{a}$ и имеет длину в 3 раза больше, а вектор $-4\overline{a}$ противоположно направлен с вектором $\overline{a}$ и имеет длину в 4 раза больше длины вектора $\overline{a}$. При этом векторы $3\overline{a}$ и $-4\overline{a}$ могут быть отложены от любой точки плоскости: от начала вектора $\overline{a}$, от любой точки прямой, на которой лежит вектор $\overline{a}$, от любой точки, не лежащей на этой прямой. Все векторы, изображенные на рисунке, коллинеарны.

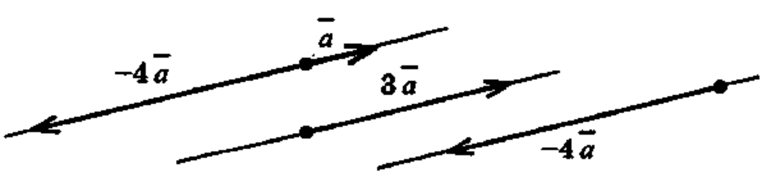


Рис. 10.21

4. Рассмотрим обратное утверждение:

Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — ненулевые коллинеарные векторы. Тогда существует число λ такое, что $\overline{b} = \lambda\overline{a}$.

Другими словами, надо доказать, что вектор $\bar{b}$ можно представить в виде произведения числа на вектор $\bar{a}$.

Доказательство в общем виде можно не проводить. Вместо этого дать пояснения на примерах:

1. Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены, длина вектора $\bar{a}$ равна 4, длина вектора $\bar{b}$ равна 12. Тогда, чтобы получить вектор $\bar{b}$, нужно умножить вектор $\bar{a}$ на 3. Действительно, вектор $3\bar{a}$ с вектором $\bar{a}$ сонаправлен и его модуль равен 12, т. е. $\bar{b} = 3\bar{a}$.

2. Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ противоположно направлены, длина вектора $\bar{a}$ равна 4, длина вектора $\bar{b}$ равна 6. Тогда, чтобы получить вектор $\bar{b}$, нужно умножить вектор $\bar{a}$ на $-\frac{3}{2}$. Действительно, вектор $-\frac{3}{2}\bar{a}$ с вектором $\bar{a}$ имеют противоположные направления, а его модуль равен $\left|-\frac{3}{2}\right|\cdot 4 = 6$, т.е. $\bar{b} = -\frac{3}{2}\bar{a}$.

Два рассмотренных утверждения можно объединить:

Ненулевые векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда один вектор есть произведение другого вектора на число.

Для краткости записей при решении задач можно использовать значки:

$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ — для сонаправленных векторов и $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ — для противоположно направленных векторов.

III. Решение задач

Решить задачу № 17 (устно)

Решение задачи приведено в тексте учебника. Его запись на доске может выглядеть следующим образом:

$\overline{AB}\,(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$, $\overline{BA}\ (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2)$, $\Rightarrow \overline{AB} = (-1)\cdot\overline{BA}$. Значит, $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ противоположно направлены (по теореме 10.2).

Замечания.

1) Так как суммой этих векторов является нулевой вектор, то их называют противоположными.

2) Вычитание вектора можно заменять сложением с противоположным ему вектором.

Решить задачу

Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Вектор $\bar{c} = 2\bar{b} - 3\bar{a}$.

1) Найдите координаты вектора $\bar{c}$, если $\bar{a}$ (1; −2), $\bar{b}$ (3; 2).

2) Постройте вектор $\bar{c}$, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы геометрически (рис. 10.22, а).

Решение.

1) $2\bar{b}$ (6; 4), $3\bar{a}$ (3; −6), $\bar{c}$ (6 − 3; 4 + 6), $\bar{c}$ (3; 10).

2) От произвольной точки A откладываем последовательно векторы $\overline{AB} = 2\bar{b}$ и $\overline{BC} = -3\bar{a}$ (рис. 10.22, *б*), по правилу треугольника вектор $\overline{AC}$ — это искомый вектор $\bar{c}$ (рис. 10.22, *в*).

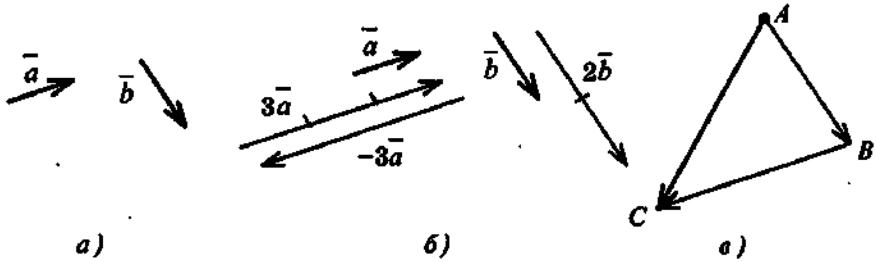


Рис. 10.22

Замечание. Для сложения векторов $2\bar{b}$ и $-3\bar{a}$ можно было их откладывать в другом порядке или использовать правило параллелограмма. Можно также было не складывать эти векторы, а из вектора $2\bar{b}$ вычитать вектор $3\bar{a}$. Но приведенное построение представляется наиболее простым.

Решить задачу № 21

Решение.

1) Построим параллелограмм $ABKC$. Тогда $\overline{AK} = \overline{AB} + \overline{AC}$ (рис. 10.23).

2) Т.к. $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AK}$, то $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$.

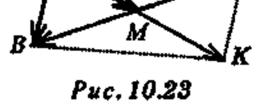


Рис. 10.23

Решить задачу № 23(1, 3)

Решение.

1) Точка O делит пополам диагонали параллелограмма (рис. 10.24).

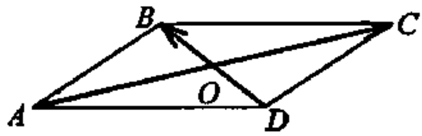


Рис. 10.24

Тогда $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} =$

$= \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{DB} = \frac{\bar{a}}{2} + \frac{\bar{b}}{2}$.

2) $\overline{CD} = -\overline{AB} = -\frac{\bar{a}}{2} - \frac{\bar{b}}{2}$.

Решить задачу № 24 (устно)[1]

Решение.

1) Если $\bar{a}$ $(a_1;\ a_2)$ и $\bar{b}\,(b_1;\ b_2)$ коллинеарны, то $\bar{a} = k\ \bar{b}$, т.е. $\bar{a}$ $(kb_1;\ kb_2)$. Тогда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$.

2) Если $\bar{a}$ $(a_1;\ a_2)$ и $\bar{b}\,(b_1;\ b_2)$ и $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$, то $\bar{a}$ $(kb_1;\ kb_2)$ т.е. $\bar{a} = k\ \bar{b}$, значит, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

Решить задачу (устно)

Коллинеарны ли векторы $\overline{(2;-4)}$ *и* $\overline{(-1;2)}$, $\overline{(2;-4)}$ *и* $\overline{(4;-2)}$?.

Решение.

1) У первой пары векторов отношения соответствующих координат равны $-\frac{1}{2}$, т.е. координаты пропорциональны, векторы коллинеарны.

2) У второй пары векторов отношения соответствующих координат равны 2 и $\frac{1}{2}$, т.е. координаты не пропорциональны, векторы неколлинеарны.

[1] В задаче рассматриваются векторы, все координаты которых отличны от 0.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 17–20 (без доказательства). Решить задачи № 19 (с построениями), 23 (2, 4), 25.

Указания к задачам

18. $\bar{a}\ (1; -2) = 2\,\bar{b}\ (0{,}5; -1)$; $\bar{c} = -2\,\bar{d}$.

19. $\bar{c}\ (-6 + 0; -4 - 4) = \bar{c}\ (-6; -8)$, $|\bar{c}| = \sqrt{36 + 64} = 10$.

Построения на рисунке 10.25.

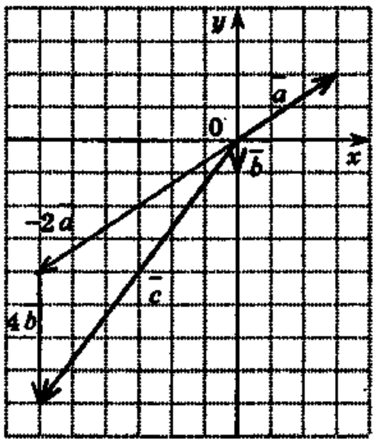


Рис. 10.25

20. $|\lambda \cdot \bar{a}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}| = 5$, 1) $|\bar{a}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$, $\lambda = \pm 0{,}5$; 2) $|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, $\lambda = \pm 1$; 3) $|\bar{a}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, $\lambda = \pm\frac{5}{13}$.

22. Сложив векторные равенства $\overline{MA} + \overline{AC} + \overline{CN} = \overline{MN}$ и $\overline{MB} + \overline{BD} + \overline{DN} = \overline{MN}$, находим, что $2\overline{MN} = (\overline{MA} + \overline{MB}) + (\overline{CN} + \overline{DN}) + (\overline{AC} + \overline{BD})$, и воспользуемся тем, что $\overline{MA} + \overline{MB} = \bar{0}$ и $\overline{CN} + \overline{DN} = \bar{0}$.

23. $\overline{CB} = \overline{CO} + \overline{OB} = -\frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{DB} = -\frac{\bar{a}}{2} + \frac{\bar{b}}{2}$, $\overline{AD} = -\overline{CB} = \frac{\bar{a}}{2} - \frac{\bar{b}}{2}$ (см. рис. 10.26).

25. Для выявления коллинеарных векторов можно вычислить отношения соответствующих координат всех пар векторов. Решение более короткое заключается в том, чтобы представить каждый вектор в виде числа, умноженного на вектор с первой координатой, равной 1: $\overline{a} = 2\overline{(1;-2)}$, $\overline{b} = \overline{(1;1)}$, $\overline{c} = \overline{(1;-2)}$, $\overline{d} = \overline{(1;2)}$. В таком виде легче заметить, что только векторы $\overline{a}$ и $\overline{c}$ коллинеарны, т.к. $\overline{a} = 2\overline{c}$, в остальных парах нельзя представить один вектор как произведение другого на число.

26. Т.к. $-2 = 1\cdot(-2)$, то $m = (-1)\cdot(-2) = 2$.

Дополнительные задачи

1. MN — средняя линия треугольника ABC, причем $M \in AC$, $N \in BC$, $\overline{MN}(3; -4)$. Найдите координаты вектора $\overline{BA}$.

Ответ: $\overline{(-6;8)}$.

2. В трапеции (рис.10.26) MN — средняя линия, $AB = 12$, $CD = 8$. Найдите такое значение λ, что а) $\overline{AB} = \lambda\overline{MN}$; б) $\overline{CD} = \lambda\overline{MN}$.

Ответ: а) 1,2 б) −0,8.

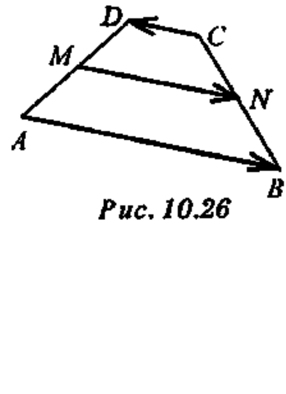


Рис. 10.26

Урок 61

ТЕМА: Скалярное произведение векторов

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Операция скалярного умножения векторов находит широкое применение в геометрии и механике. Поэтому особую важность приобретает формирование практических умений, связанных с применением этой операции. В частности, необходимо отработать применение скалярного произведения векторов для вычисления углов, в том числе и для выявления прямых углов.

Необходимо обратить внимание учащихся на важность определения знака косинуса угла φ между векторами: $\cos\varphi > 0$ при

$0° < \varphi < 90°$ и $\cos\varphi < 0$ при $90° < \varphi < 180°$. Таким образом, знак $\cos\varphi$ позволяет определить, является ли острым угол φ или тупым. Полезно рассмотреть с учащимися пограничные случаи для угла φ между векторами: когда он равен 0° и 180°. Эти частные случаи можно использовать для выявления коллинеарных векторов с помощью скалярного произведения векторов.

До сих пор результатом всех изученных действий над векторами (сложение и умножение на число) являлся вектор. При изучении теории и решении задач необходимо неоднократно подчеркнуть, что результатом скалярного произведения векторов является число (скаляр).

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать формулы для вычисления скалярного произведения двух векторов, вытекающие из его определения и теоремы 10.3;

знать, что такое скалярный квадрат вектора и угол между векторами;

уметь вычислять скалярное произведение векторов, заданных координатами, и векторов с известными длинами и углом между ними.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Самостоятельная работа — 10 мин	
3	Изучение нового материала — 10 мин	Две формулы для вычисления скалярного произведения векторов, скалярный квадрат вектора, угол между векторами
4	Решение задач — 13 мин	Задачи № 30, дидактические задачи на формулы скалярного произведения векторов
5	Домашнее задание — 2 мин	Контрольные вопросы 21–25 (без доказательства). Задача № 31, дополнительные задачи 1 и 2

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 17–20 (без доказательства), решение задач № 19 и 23(3, 4) с выполнением рисунков на доске, задача № 25 устно.

II. Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Даны точки A (1; 2), B (3; 0), C (−4; 5), D (−6; 7). Установите, равны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.

Ответ: $\overline{AB}$ $(3-1; 0-2) = \overline{DC}$ $(-4+6; 5-7)$.

2. От точки A (−1; 3) отложите вектор $\overline{a}$ (−1; −5).

Ответ: см. рис. 10.27.

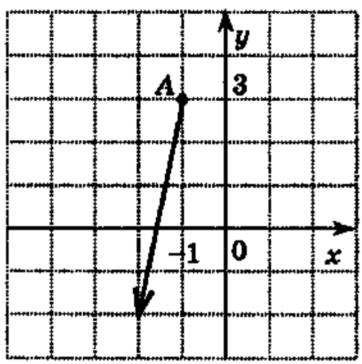


Рис. 10.27

3. Даны векторы $\overline{m}(4;-3)$ и $\overline{n}(-2;1)$. Найдите координаты векторов $\overline{a} = \overline{m} + \overline{n}$ и $\overline{c} = \overline{m} - \overline{n}$. Вычислите $|\overline{m} + \overline{n}|$.

Ответ: $\overline{a}$ (2; −2), $\overline{c}$ (6; −4), $|\overline{m} + \overline{n}| = |\overline{a}| = 2\sqrt{2}$.

4. Дан треугольник KLM. Постройте вектор $\overline{b} = \overline{KL} - \overline{LM}$.

Ответ: см. рис. 10.28.

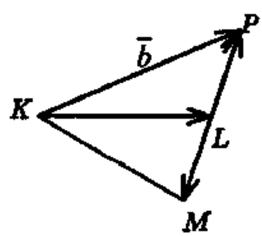


Рис. 10.28

Вариант 2

1. Даны точки A (1; 2), B (3; 0), C (–4; 5), D (–6; 7). Установите, равны ли векторы $\overline{BA}$ и $\overline{CD}$.

Ответ: $\overline{BA}$ $(1-3; 2-0) = \overline{CD}(-6+4; 7-5)$.

2. От точки A (–1; 3) отложите вектор $\bar{a}$ (–3; 2).

Ответ: см. рис. 10.29.

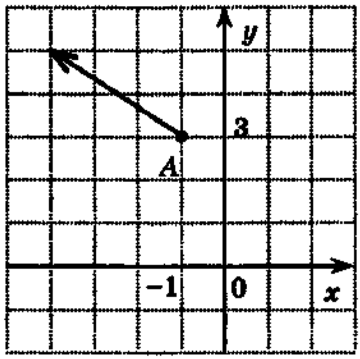


Рис. 10.29

3. Даны векторы $\bar{p}$ (–3; 2) и $\bar{q}$ (1; 6). Найдите координаты векторов $\bar{m} = \bar{p} + \bar{q}$ и $\bar{n} = \bar{p} - \bar{q}$. Вычислите $|\bar{p} - \bar{q}|$.

Ответ: $\bar{m}$ (–2; 8), $\bar{n}$ (–4; –4), $|\bar{p} - \bar{q}| = |\bar{n}| = 4\sqrt{2}$.

4. Дан треугольник PNL. Постройте вектор $\bar{n} = \overline{NL} - \overline{LP}$.

Ответ: см. рис. 10.30.

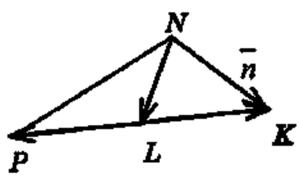


Рис. 10.30

III. Изучение нового материала

1. Сообщая учащимся определение скалярного произведения, следует обратить их внимание на то, что оно дает способ вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных координатами:

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ $(a_1; a_2)$ и $\overline{b}$ $(b_1; b_2)$ называется число $a_1 b_1 + a_2 b_2$.

На конкретном примере показываем, как производится скалярное умножение данных векторов, и обращаем внимание учащихся на следующие моменты:

— перемножаются соответствующие координаты данных векторов и полученные произведения складываются;

— в результате скалярного умножения векторов получается число.

— удобно данные векторы расположить один под другим, тогда хорошо будет видно, какие координаты нужно перемножать:

$$\begin{array}{c} \overline{a}\,(3;5) \\ \underline{\overline{b}\,(2;4)\qquad\qquad} \\ \overline{a}\cdot\overline{c} = 3\cdot 2 + 5\cdot 4 = 26 \end{array}$$

2. Распределительное свойство скалярного умножения векторов можно дать без доказательства, пояснив, что для векторов это свойство аналогично распределительному закону умножения и сложения для чисел, поскольку операции над векторами сводятся к аналогичным операциям над их координатами, т. е. над числами. На доске записываем:

$$(\overline{a} + \overline{b})\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{c} + \overline{b}\cdot\overline{c}.$$

Для того чтобы продемонстрировать это свойство на примере и для закрепления способа вычисления скалярного произведения векторов? учащимся предлагается следующее задание.

Задание 1

1. Даны векторы $\overline{a}$ $(2; -3)$, $\overline{b}$ $(4; 5)$ и $\overline{c}$ $(-1; 2)$. Вычислите и сравните получившиеся результаты: $(\overline{a} + \overline{b})\cdot\overline{c}$ и $\overline{a}\cdot\overline{c} + \overline{b}\cdot\overline{c}$.

Решение. $\overline{(2;-3)} + \overline{(4;5)} = \overline{(6;2)}$, $\overline{(6;2)}\cdot\overline{(-1;2)} = 6\cdot(-1) + 2\cdot 2 = -2$; $\overline{(2;-3)}\cdot\overline{(-1;2)} = 2\cdot(-1) + (-3)\cdot 2 = -8$, $\overline{(4;5)}\cdot\overline{(-1;2)} = 4\cdot(-1) + 5\cdot 2 = 6$, $-8 + 6 = -2$. **Результаты одинаковы.**

3. Определение угла между двумя векторами поясняем с помощью рисунка 10.31.

Углом между ненулевыми векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (т. е. исходящими из одной точки A) называется $\angle BAC$.

Углом между любыми ненулевыми векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом.

Угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю.

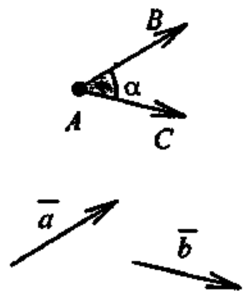


Рис. 10.31

Таким образом, чтобы найти угол между векторами, произвольно расположенными на плоскости, нужно отложить их от одной точки (например, перенести один из векторов так, чтобы их начало совместилось) и определить угол между построенными векторами.

4. Формулировку теоремы 10.3 комментируем с помощью рисунка 10.31, записываем формулу и даем геометрическую интерпретацию.

Скалярное произведение двух векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\alpha.$$

Модули векторов, записанные в правой части формулы, означают длины отрезков. Поэтому если, например, векторы заданы сторонами треугольника и исходят из одной вершины, то их скалярное произведение равно произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

Доказательство теоремы можно не рассматривать, предложив его разобрать дома желающим.

Для закрепления этого способа вычисления скалярного произведения векторов учащимся предлагаются следующие задания.

Задание 2

В параллелограмме $ABCD$ (рис.10.32) $\angle BAC = 120°$, $\angle CAD = 30°$. Найдите:

а) $\overline{AD} \cdot \overline{AC}$, если $BC = 8$, $AC = 6$;

б) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$, если $AB = 3$, $AC = 6$;

в) $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$, если стороны параллелограмма равны 4 и 8.

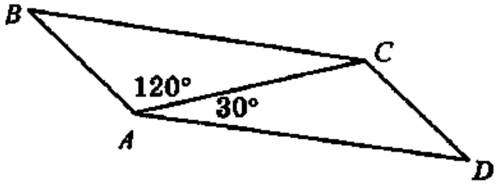


Рис. 10.32

Р е ш е н и е.

а) $\overline{AD} \cdot \overline{AC} = 8 \cdot 6 \cdot \cos 30° = \dfrac{48\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$;

б) $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 3 \cdot 6 \cdot \cos 120° = 18 \cdot (-\dfrac{1}{2}) = -9$;

в) $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 4 \cdot 8 \cdot \cos 150° = 32 \cdot (-\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = -16\sqrt{3}$.

5. Рассматриваем понятие скалярного квадрата вектора:

Скалярным квадратом вектора $\overline{a}$ называется скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{a}$. Оно обозначается $\overline{a}^2$.

Так как $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ и $\overline{a} \cdot \overline{a} = a_1^2 + a_2^2$, то $|\overline{a}|^2 = \overline{a}^2$.

Этот же результат можно получить, если использовать вторую формулу для вычисления скалярного произведения: $\overline{a}^2 = \overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}| \cdot |\overline{a}| \cdot \cos 0° = |\overline{a}|^2$, т.к. $\cos 0° = 1$.

IV. Решение задач

Решить задачу

*Даны векторы $\overline{a}$ $(-2;\ -3)$ и $\overline{b}$ $(1;\ 4)$. **Найдите:** 1) $\overline{a}^2$; 2) $\overline{a}\overline{b}$; 3) $\overline{a}(\overline{a}+\overline{b})$.*

Р е ш е н и е.

1) $\overline{a}^2 = (-2)^2 + (-3)^2 = 13$; 2) $\overline{a}\,\overline{b} = -2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -14$;

3) $\overline{a}(\overline{a}+\overline{b}) = \overline{a}^2 + \overline{a}\,\overline{b} = 13 - 14 = -1$.

Замечание. Полезно рассмотреть с учащимися другой способ выполнения третьего шага решения: $\overline{a}+\overline{b} = \overline{(-1;1)}$, $\overline{a}\left(\overline{a}+\overline{b}\right) = -2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -1$.

Решить задачу

Даны два вектора, длины которых равны 3 и 4. Найдите косинус угла между ними и определите острый или тупой этот угол, если их скалярное произведение равно: 1) 8; 2) −10.

Решение.

$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{a}|\cdot\cos\alpha$, тогда имеем:

1) $8 = 12\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, α — острый угол, т.к. $\cos\alpha$ — положительный;

2) $-10 = 12\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6}$, α — тупой угол, т.к. $\cos\alpha$ — отрицательный.

Решить задачу № 30.

Решение.

1) Найдем сначала квадрат искомой величины: $|\overline{a}+\overline{b}|^2 = (\overline{a}+\overline{b})^2 = \overline{a}^2 + 2\overline{a}\overline{b} + \overline{b}^2$.

2) $\overline{a}^2 = \overline{b}^2 = 1^2 = 1$, $\overline{a}\overline{b} = 1\cdot1\cdot\cos 60° = 0{,}5$, тогда $|\overline{a}+\overline{b}|^2 = 1 + 2\cdot0{,}5 + 1 = 3$, $|\overline{a}+\overline{b}| = \sqrt{3}$.

IV. Домашнее задание

Ответить на контрольные вопросы 21–25 (без доказательства). Решить задачу № 31, дополнительные задачи 1 и 2.

Указания к задачам

28. Воспользоваться тем, что $|\overline{a}|^2\cdot|\overline{b}|^2\cdot\cos^2\varphi \le |\overline{a}|^2\cdot|\overline{b}|^2$, т.к. $0 \le \cos^2\varphi \le 1$, $|\overline{a}+\overline{b}| = \sqrt{3}$.

31. $\overline{a}\cdot(\overline{a}+\overline{b}) = \overline{a}^2 + \overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{a}+\overline{b}|\cdot\cos\gamma$; используя полученные в задаче 30 результаты, имеем: $1 + 0{,}5 = 1\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\gamma$, тогда $\cos\gamma = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Угол γ равен 30°.

34. $\overline{a}\overline{b} = -mn + mn = 0$.

35. $\overline{ab} = 3m + 4\cdot2 = 3m + 8 = 0 \Rightarrow m = -\frac{8}{3}$.

36. $\overline{a}(\overline{a}+\lambda\overline{b})=a^2+\lambda\overline{ab}=1^2+\lambda\cdot(1\cdot1+0\cdot1)=1+\lambda=0\Rightarrow\lambda=-1.$

42. В ромбе $ABCD$ примем $\overline{AD}=\overline{a}$, $\overline{AB}=\overline{b}$. Тогда $\overline{AC}=\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{BD}=\overline{a}-\overline{b}$. Но AC и BD диагонали ромба. Следовательно, $\overline{AC}\cdot\overline{BD}=(\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}-\overline{b})=a^2-b^2=0$. (Разность квадратов сторон равна нулю потому, что исходная фигура — ромб, а у него все стороны равны между собой.)

Дополнительные задачи

1. Даны векторы $\overline{a}$ (2; 4) и $\overline{b}$ (3; −5). Найдите $\overline{a}\overline{b}$ и $\overline{a}(\overline{a}-\overline{b})$.

О т в е т: −14 и 34.

2. Дано: ΔABC, AB = 10, AC = 8, $\angle A$ = 30°. Найдите: $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ и $\overline{AB}\cdot\overline{CA}$

О т в е т: $40\sqrt{3}$ и $-40\sqrt{3}$.

3. Скалярное произведение двух векторов, имеющих равные длины, равно −12, а угол между ними равен 120°. Найдите их абсолютные величины.

О т в е т: $2\sqrt{6}$.

4. ABC — равносторонний треугольник со стороной, равной 6, BD — его высота. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$; б) $\overline{AD}$ и $\overline{CD}$; в) $\overline{AD}$ и $\overline{CB}$.

О т в е т: а) 9; б) −9; в) −9.

Урок 62

ТЕМА: Скалярное произведение векторов

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

На этом уроке нужно показать учащимся, как совместное применение изученных двух формул для вычисления скалярного произведения векторов позволяет находить углы между векторами. При этом можно показать, (но не требовать усвоения) специальную формулу для вычисления косинуса угла между двумя векторами. Основным способом нахождения этого угла более целесообразно оставить составление равенства двух выражений на основе двух формул скалярного произведения, подстановки в это равенство известных величин и решения получившегося уравнения. Этот способ является более общим по сравнению с формулой косинуса угла, так как позволяет находить любые неизвестные компоненты составленного равенства.

Перед рассмотрением признака перпендикулярности векторов полезно обсудить с учащимися и другие частные случаи угла между векторами (0° и 180°).

ТРЕБОВАНИЯ К УСВОЕНИЮ МАТЕРИАЛА

В результате изучения материала учащиеся должны:

знать способ вычисления угла между векторами и признак перпендикулярности векторов;

уметь вычислять косинус угла между векторами, заданными своими координатами или координатами конца и начала, выявлять перпендикулярные векторы, используя признак, и обратно: применять свойство перпендикулярных векторов.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Анализ выполнения самостоятельной работы — 8 мин	
3	Изучение нового материала — 10 мин	Вычисление угла между векторами, признак перпендикулярности векторов
4	Решение задач — 15 мин	Задачи № 33, 37, 44, 38, 39 (устно), 40 (устно)
5	Домашнее задание — 2 мин	Контрольный вопрос 26. Задачи № 32, 41, 43

ХОД УРОКА

I. Проверка домашнего задания

Проверить вопросы 21, 23–25 (без доказательства), решение задачи № 31 и дополнительных задач 1 и 2 с выполнением рисунков на доске.

II. Анализ выполнения самостоятельной работы

Вычислительная часть решения задач самостоятельной работы записывается на доске, обоснования проводятся устно.

III. Изучение нового материала

1. Рассмотрим частные случаи вычисления скалярного произведения векторов $\overline{a}\,(a_1;\ a_2)$ и $\overline{b}\,(b_1;\ b_2)$, когда угол между векторами равен а) 0°, б) 180°, в) 90°:

а) $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos 0° = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$,

б) $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos 180° = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot(-1) = -\,|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$,

в) $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos 90° = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot 0 = 0$.

Так как в первых двух случаях речь идет о сонаправленных и противоположно направленных векторах (т. е. о коллинеарных), а в последнем случае о перпендикулярных векторах, то можно сделать следующие выводы:

Скалярное произведение сонаправленных векторов равно произведению их длин, а противоположно направленных — противоположно произведению их длин.

Скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю.

Рассмотрим утверждение, обратное последнему:

Если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.

Это утверждение также верно, т.к., если $|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\alpha = 0$, а $|\overline{a}|\neq 0$ и $|\overline{b}|\neq 0$, то $\cos\alpha = 0$, т. е. $\alpha = 90°$.

Таким образом, при решении задач, связанных с перпендикулярностью отрезков (или прямых), можно использовать оба утверждения — свойство и признак перпендикулярных векторов.

Для закрепления рассмотренных утверждений учащимся предлагаются задания.

Задание 1

Докажите, что $\overline{m}(3; -6) \perp \overline{n}(8; 4)$.

Решение. Т.к. $3 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = 0$, то $\overline{m} \perp \overline{n}$.

Задание 2

ABCD — ромб. Найдите $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$.

Решение. Т.к. в ромбе диагонали перпендикулярны, то $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$.

2. Рассмотрим, как с помощью скалярного произведения векторов $\overline{a}(a_1; a_2)$ и $\overline{b}(b_1; b_2)$ можно находить угол между ними. Для этого будем использовать обе формулы скалярного произведения:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \text{ и } \overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\alpha.$$

Из этих двух формул следует, что

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\alpha.$$

Подставив в полученное равенство известные величины, сможем вычислить $\cos\alpha$.

Для закрепления рассмотренного способа учащимся предлагаются задания.

Задание 3

Найдите косинус угла α между векторами $\overline{a}(4; 3)$ и $\overline{b}(5; 12)$.

Решение.

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 12 = 56$.

2) $|\overline{a}| = \sqrt{16+9} = 5$, $|\overline{b}| = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$, $\overline{a} \cdot \overline{b} = 5 \cdot 13 \cdot \cos\alpha = 65\cos\alpha$.

3) $65\cos\alpha = 56$, $\cos\alpha = \dfrac{56}{65}$.

Задание 4

Найдите угол α между векторами $\overline{a}(4; -2)$ и $\overline{b}(-1; 3)$.

Решение.

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 = -10$.

2) $|\vec{a}| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$, $|\vec{b}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\alpha =$
$= 10\sqrt{2} \cdot \cos\alpha$.

3) $10\sqrt{2} \cdot \cos\alpha = -10$, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = 135°$.

Замечание. Следует обратить внимание учащихся на то, что знак косинуса искомого угла показывает, острый этот угол или тупой. Значения некоторых углов можно находить с помощью тригонометрической окружности (см. рис. 8.40, урок 46) или сведением к значениям смежных острых углов. В частности, в данной задаче: так как $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, то $180° - \alpha =$ $= 45$. Тогда $\alpha = 135°$.

IV. Решение задач

Решить задачу № 33

Р е ш е н и е.

Найдем углы между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ (рис. 10.33).

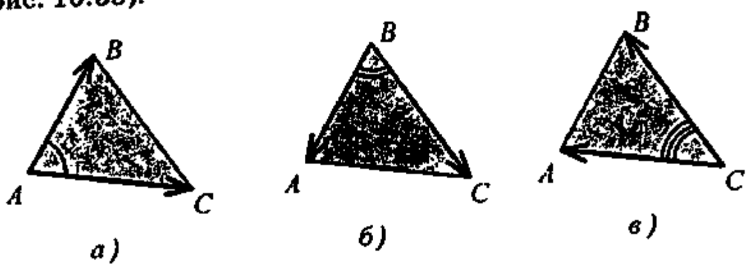


Рис. 10.33

1) $\overline{AB}(2 - 0;\ \sqrt{3} - \sqrt{3}) = \overline{AB}(2;\ 0)$, $\overline{BA}(-2;\ 0)$ $|\overline{AB}| = |\overline{BA}| = 2$ (т.к. векторы параллельны оси Oy);

$\overline{BC}\left(\dfrac{3}{2} - 2;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) = \overline{BC}\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overline{CB}\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $|\overline{BC}| =$ $= |\overline{CB}| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$;

$$\overline{AC}\left(\frac{3}{2}-0;\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\right)=\overline{AC}\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \overline{CA}\left(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$|\overline{AC}|=|\overline{CA}|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$;

2) $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=2\cdot\frac{3}{2}+0\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3$, $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos A$,

$3=2\sqrt{3}\cos A$, $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle A=30°$.

3) $\overline{BA}\cdot\overline{BC}=-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1$, $\overline{BA}\cdot\overline{BC}=2\cdot 1\cdot\cos B$,

$1=2\cos B$, $\cos B=\frac{1}{2}$, $\angle B=60°$.

4) $\overline{CA}\cdot\overline{CB}=\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$, тогда $\overline{AB}\perp\overline{BC}$,

$\angle C=90°$.

Замечание. Последнее действие можно было не делать, заменив его вычислением: $\angle C=180°-30°-60°=90°$.

Решить задачу № 37

Решение.

1) $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})=\bar{a}^2-\bar{b}^2$.

2) Т.к. $|\bar{a}|=1$ и $|\bar{b}|=1$, то $\bar{a}^2=\bar{b}^2=1$, значит, $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})=0$, т.е. $(\bar{a}+\bar{b})\perp(\bar{a}-\bar{b})$.

Замечание. Условие неколлинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно обсудить устно: из него следует, что $\bar{a}+\bar{b}\neq 0$ и $\bar{a}-\bar{b}\neq 0$. Это условие необходимо для того, чтобы сделать вывод о перпендикулярности векторов, скалярное произведение которых равно нулю.

Решить задачу № 44

Решение.

1) $\overline{AB}(1;1)$, $\overline{BC}(-1;1)$, $\overline{DC}(1;1)$.

2) Т.к. $\overline{AB}\cdot\overline{BC}=1\cdot(-1)+1\cdot 1=0$, то $\overline{AB}\perp\overline{BC}$,

3) Т.к. $\overline{AB} = \overline{DC}$, то $ABCD$ – параллелограмм. Если в нем $\angle B = 90°$, то в параллелограмме $ABCD$ все углы прямые, значит, $ABCD$ — прямоугольник.

4) Т.к. $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$, то соседние стороны равны, т.е. в прямоугольнике $ABCD$ все стороны равны, значит, это квадрат.

Решить задачу № 38

Решение задачи приведено в учебнике. Шаги доказательства можно записать в следующем виде:

1) Т.к. $ABCD$ — параллелограмм, то $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$, $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}$ (рис. 10.34).

2) $(\overline{AB} + \overline{AD})^2 = \overline{AC}^2$, $(\overline{AB} - \overline{AD})^2 = \overline{DB}^2$.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} \overline{AB}^2 + 2\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 \\ \overline{AB}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{AD}^2 = \overline{DB}^2 \end{array} \\ \hline 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DB}^2 \end{array}$$

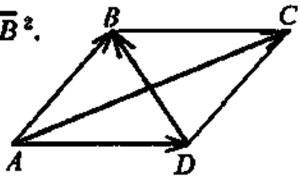


Рис. 10.34

Решить задачу № 39 (устно с выполнением на доске рисунка и преобразований)

Решение.

1) Пусть в треугольнике ABC даны стороны $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Тогда медиана $AO = m_a$.

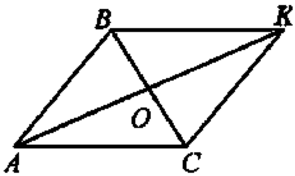


Рис. 10.35

Отложим на луче AO отрезок $OK = AO$, тогда в четырехугольнике $ABKC$ диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, значит, это параллелограмм.

2) По доказанному в задаче 38 имеем: $2AB^2 + 2AC^2 = BC^2 + AK^2$ или $2c^2 + 2b^2 = a^2 + (2m_a)^2$. Отсюда $4m_a^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2$, $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

3) Аналогично, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ и $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Решить задачу № 40 (устно с выполнением рисунка 10.36 на доске)

Решение.

Пусть A и B — две данные точки, $AB = a$, C — произвольная точка, для которой выполняется условие $AC^2 + BC^2 = d$ — постоянная величина. Пусть CO — медиана треугольника ABC. По результату, полученному в задаче 39, $CO = \frac{1}{2}\sqrt{2CA^2 + 2CB^2 - AB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2d - a^2}$.

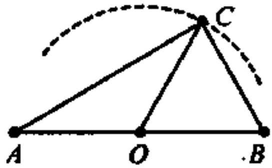


Рис. 10.36

Таким образом, отрезок CO имеет одинаковую длину для всех точек C, удовлетворяющих данному условию. Значит, все такие точки C находятся на одном расстоянии от точки O, а геометрическим местом таких точек является окружность с центром в точке O — середине отрезка AB.

V. Домашнее задание

Ответить на контрольный вопрос 26. Решить задачи № 32, 41, 43.

Указания к задачам

29. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$, значит, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

32. (см. рис. 10.36).

1) $\overline{AB}\,(3;\,0)$, $\overline{BA}\,(-3;\,0)$ $|\overline{AB}| = |\overline{BA}| = 3$; $\overline{BC}\,(0;\,4)$, $\overline{CB}\,(0;\,-4)$, $|\overline{BC}| = |\overline{CB}| = 4$; $\overline{AC}\,(3;\,4)$, $\overline{CA}\,(-3;\,-4)$, $|\overline{AC}| = |\overline{CA}| = \sqrt{9+16} = 5$;

2) $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 9 + 0 = 9$, $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 3 \cdot 5 \cdot \cos A$, $9 = 15\cos A$, $\cos A = \frac{3}{5}$.

3) $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0 + 0 = 0$, т.е. $\overline{BA} \perp \overline{BC}$, $\cos B = 0$.

4) $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0 + 16 = 16$, $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 5 \cdot 4 \cdot \cos C$, $16 = 20\cos C$, $\cos C = \frac{4}{5}$.

41. Т.к. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$, то $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$, т.е. $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

43. $\overline{AB} = \overline{DC}$, значит, $ABCD$ — параллелограмм, $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0$, значит, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$. Тогда $ABCD$ — прямоугольник.

Дополнительные задачи

1. Докажите, что треугольник с вершинами $A(4;1)$, $B(2;5)$, $C(8;8)$ — прямоугольный.

2. Вычислите $|2\vec{a} - \vec{b}|$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$.

Ответ: $2\sqrt{10}$.

Урок 63

ТЕМА: **Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Разложение вектора по координатным осям**

КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Материал, связанный с разложением векторов по неколлинеарным векторам, изучается в ознакомительном плане, то есть от учащихся не требуется усвоения этого материала. Разложение вектора по координатным векторам не отражено в вопросах для повторения, а приведенные в учебнике задачи на этот материал связаны только с усвоением текущего материала и не дают примеров его применения для исследования геометрических объектов. Поэтому он также может изучаться в ознакомительном плане.

ПЛАН УРОКА

№	Этап урока	Содержание работы
1	Проверка домашнего задания — 5 мин	
2	Самостоятельная работа — 10 мин	
3	Изучение нового материала — 10 мин	Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам, по координатным осям, координатные векторы
4	Решение задач — 13 мин	Задачи № 45, 46, дидактические задачи на разложение векторов
5	Домашнее задание — 2 мин	Задачи № 27, 47

ХОД УРОКА

I°. Проверка домашнего задания

Проверить вопрос 26, решение задач № 32 устно, № 41 с выполнением записей на доске, № 43 устно с выполнением рисунка на доске.

II°. Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Найдите угол между векторами $\bar{a}\,(2; -4)$ и $\bar{b}\,(3; -1)$.

Ответ: $\cos\alpha = \dfrac{10}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = 45°$.

2. Какие из данных векторов взаимно перпендикулярны: $\bar{a}\,(1; 3)$, $\bar{b}\,(2; -\frac{1}{3})$, $\bar{c}\,(-\frac{1}{2}; -3)$? Ответ: $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Вариант 2

1. Найдите угол между векторами $\bar{a}\,(-1; 7)$ и $\bar{b}\,(-4; 3)$.

Ответ: $\cos\alpha = \dfrac{25}{\sqrt{50}\cdot 5} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = 45°$.

2. Какие из данных векторов взаимно перпендикулярны: $\bar{a}\,(2; -\frac{1}{5})$, $\bar{b}\,(-\frac{1}{5}; -2)$, $\bar{c}\,(-4; -40)$? Ответ: $\bar{a}$ и $\bar{c}$.

II. Изучение нового материала

1. Учащимся предлагаются задания, которые они выполняют в тетради одновременно с выполнением их на доске учителем.

1. Изобразите два неколлинеарных ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и произвольный вектор $\bar{c}$ (рис. 10.37).

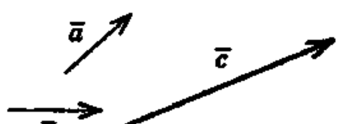


Рис. 10.37

2. Отложите от точки A вектор $\overline{AC} = \bar{c}$. Проведите через точки A и C прямые, параллельные векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 10.38).

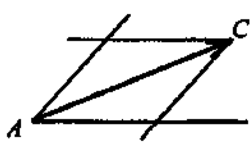


Рис. 10.38

3. Представьте вектор $\overline{AC}$ в виде суммы векторов, лежащих на проведенных прямых (рис. 10.39: если $BC \parallel AD$ и $CD \parallel AB$, то $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$).

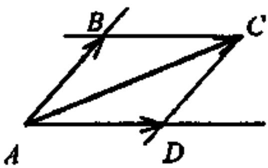


Рис. 10.39

4. Запишите условие коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{AB}$, $\overline{b}$ и $\overline{AD}$ ($\overline{AB} = \lambda\overline{a}$, $\overline{AD} = \mu\overline{b}$).

5. Выразите вектор $\overline{c}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ($\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$).

После этого делаем вывод:

Любой вектор $\overline{c}$ можно представит в виде $\lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$, где $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — данные ненулевые неколлинеарные векторы.

2. Учащимся предлагается рассмотреть частный случай, когда векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — единичные (т. е. их абсолютная величина равна единице) и имеют направления положительных координатных полуосей (рис. 10.40).

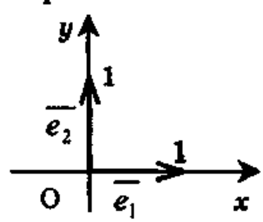


Рис. 10.40

Единичные векторы, сонаправленные с положительными координатными полуосями, называются координатными векторами или ортами.

Эти векторы имеют координаты $\overline{e}_1\,(1; 0)$ и $\overline{e}_2\,(0; 1)$.

Так как $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ неколлинеарны, то вектор $\overline{a}$ можно разложить по этим векторам (рис. 10.41): $\overline{a} = \lambda\overline{e_1} + \mu\overline{e_2}$.

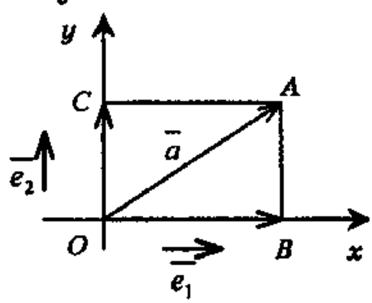


Рис. 10.41

Докажем, что коэффициенты λ и μ являются координатами вектора $\overline{a}$ $(a_1; a_2)$.

$\overline{a}\cdot\overline{e}_1 = (\lambda\overline{e}_1 + \mu\overline{e}_2)\overline{e}_1$,	$\overline{a}\cdot\overline{e}_2 = (\lambda\overline{e}_1 + \mu\overline{e}_2)\overline{e}_2$,
$a_1\cdot 1 + a_2\cdot 0 = \lambda\overline{e}_1\cdot\overline{e}_1 + \mu\overline{e}_2\cdot\overline{e}_1$,	$a_1\cdot 0 + a_2\cdot 1 = \lambda\overline{e}_1\cdot\overline{e}_2 + \mu\overline{e}_2\cdot\overline{e}_2$
$a_1 = \lambda\cdot 1 + \mu\cdot 0 = \lambda$.	$a_2 = \lambda\cdot 0 + \mu\cdot 1 = \mu$.

Таким образом, любой вектор $\bar{a}$ $(a_1;\ a_2)$ можно разложить по координатным векторам и его координаты будут являться коэффициентами разложения: $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2$.

III. Решение задач

Решить задачу.

Разложите $\bar{a}$ (4; 0) *вектор по векторам* $\bar{b}$ (0; 2) *и* $\bar{c}$ (2; 1).

Решение. Пусть $\bar{a} = \lambda\bar{b} + \mu\bar{c}$, тогда $\begin{cases} 4 = \lambda\cdot 0 + \mu\cdot 2, \\ 0 = \lambda\cdot 2 + \mu\cdot 1 \end{cases}$.

$\begin{cases} 4 = 2\mu, \\ 2\lambda = -\mu \end{cases}$, $\begin{cases} \mu = 2, \\ \lambda = -1 \end{cases}$ $\bar{a} = -\bar{b} + 2\bar{c}$.

Решить задачу.

Даны координатные векторы $\bar{e}_1$ (1; 0) *и* $\bar{e}_2$ (0; 1). *Найдите координаты векторов:*

а) $\bar{a} = 3\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2$; б) $\bar{c} = -2\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2$; в) $\bar{m} = -7\bar{e}_1 - \bar{e}_2$; г) $\bar{m} = 5\bar{e}_2$.

Ответ: а) $\bar{a}$ (3; 5); б) $\bar{c}$ (−2; 4); в) $\bar{m}$ (−7; −1); г) $\bar{m}$ (0; 5).

Решить задачу № 45

Решение.

1) $|\bar{a}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$, $|\bar{b}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}}$, $|\bar{c}| = 1$,

$|\bar{d}| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$.

Значит, $\bar{a}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$ — единичные векторы.

2) $\bar{a} \neq m\bar{b}$, $\bar{a} \neq n\bar{c}$, $\bar{c} \neq l\bar{b}$, $\bar{c} \neq k\bar{d}$ $\bar{d} \neq t\bar{b}$ (у вектора $\bar{b}$ обе координаты одинаковы, у вектора $\bar{c}$ первая координата равна 0, а у векторов $\bar{a}$ и $\bar{d}$ координаты отличны от 0 и не равны друг другу), тогда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $\bar{a}$ и $\bar{c}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, $\bar{b}$ и $\bar{d}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$ не коллинеарны.

3) Т.к. $\bar{a} = (-1)\cdot\bar{d}$, то эти векторы коллинеарны, причем, $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{d}$.

Решить задачу № 46

Решение.

Если $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{e}\,(x;\ y)$, то $\overline{e} = k\overline{a}$, причем, $k > 0$, $k = \dfrac{|\overline{e}|}{|\overline{a}|} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{36+64}} = \dfrac{1}{10}$. Тогда $\overline{e}\,(0{,}6;\ 0{,}8)$.

IV. Домашнее задание

Решить задачи № 27, 47.

Указания к задачам

27. Пусть $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$, тогда $\begin{cases} -1 = \lambda + \mu, \\ 0 = \mu \end{cases}$ $\begin{cases} \mu = 0, \\ \lambda = -1. \end{cases}$

47. Ответ: (2,–3).

48. До решения задачи полезно сначала вывести или вспомнить) два факта:

(а) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{c}{c+d}$;

(б) если $\overline{a} = m_1\overline{b} + m_2\overline{c}$, $\overline{d} = n_1\overline{b} + n_2\overline{c}$, и векторы $\overline{a}$ и $\overline{d}$ ненулевые и коллинеарные, а векторы $\overline{b}$ и $\overline{c}$ ненулевые и неколлинеарные, то $\dfrac{m_1}{n_1} = \dfrac{m_2}{n_2}$.

Для доказательства утверждения (б) нужно представить $\overline{a} = k\,\overline{d}$, т.е. $m_1\overline{b} + m_2\overline{c} = k(n_1\overline{b} + n_2\overline{c})$.

Решение.

1) По свойству пропорции: $\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \dfrac{AX}{AB} = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \Rightarrow AX = \dfrac{\lambda AB}{\lambda+\mu}$,

т.к. $\overline{AX} \uparrow\uparrow \overline{AB}$, то $\overline{AX} = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\overline{AB}$.

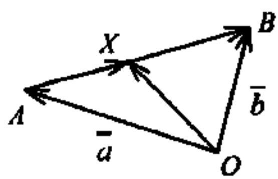


Рис. 10.42

Поскольку $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ и $\overline{OX} = \overline{OA} + \overline{AX}$ (рис. 10.42), то $\overline{OX} = \overline{a} + \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}(\overline{b} - \overline{a}) = \dfrac{\lambda\overline{a} + \mu\overline{a} + \lambda\overline{b} - \lambda\overline{a}}{\lambda+\mu} = \dfrac{\mu\overline{a} + \lambda\overline{b}}{\lambda+\mu}$.

2) Рассмотрим медианы CK и AM (рис. 10.43).

Пусть $\dfrac{CO}{OK}=\dfrac{\lambda}{\mu}$, тогда по (1) $\overline{AO} = \dfrac{\mu\bar{b}+\lambda\cdot\frac{1}{2}\bar{c}}{\lambda+\mu}$. Т.к. $\overline{AM} = \frac{1}{2}\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}$ и $\overline{AO}\uparrow\uparrow\overline{AM}$, то по доказанному в (б) имеем

$$\frac{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}}{\frac{1}{2}},$$ откуда $2\mu=\lambda$, т.е. $\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{2}{1}$.

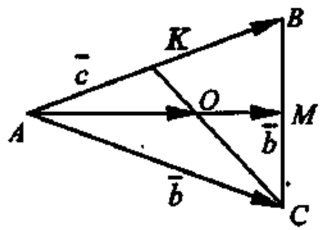


Рис. 10.43

Значит, точка O делит медиану CK в отношении 2:1. Аналогично можно доказать, что и медиана AM делится точкой O в том же отношении. Если рассмотреть таким же образом медианы AM и BP и их точку пересечения R, то получим, что эта точка тоже делит медиану AM в отношении 2:1. Отсюда следует, что точки O и R совпадают, т. е. все три медианы пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2: 1, считая от соответствующих вершин.

49. Пусть $\bar{c}\,(x;\, y) = x\overline{e_1} + y\overline{e_2}$, тогда его проекция на ось абсцисс равна $\bar{a} = x\overline{e_1}\,(x;\, 0)$. Умножим первое равенство на $\overline{e_1}$: $\bar{c}\cdot\overline{e_1} = x\overline{e_1}\cdot\overline{e_1} + y\overline{e_2}\cdot\overline{e_1} = x\overline{e_1}^{\,2} + 0 = x$, т.е. $k = x$. Подставив во второе равенство k вместо x, получим $\bar{a} = k\overline{e_1}$.

50. Записав координаты векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, а затем координаты их проекций на ось абсцисс, выполним сложение проекций векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и сравним координаты суммы с координатами вектора $\bar{c}$. Аналогично утверждение доказывается для проекций на ось ординат.

Дополнительные задачи

1. Отложите от точки $A(3; 2)$ вектор $\overline{a} = 2\overline{e_1} + \overline{e_2}$.

Ответ: $\overline{AC}$ на рисунке 10.44.

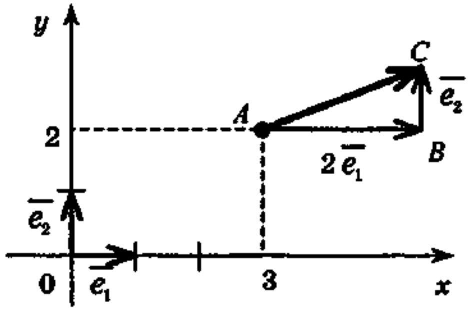


Рис. 10.44

Урок 64

ТЕМА: Контрольная работа

Вариант 1

1*. Даны точки $A(3; 2)$, $B(-1; 5)$, $C(2; 8)$, $D(-3; -4)$.

а) Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.

б) Найдите вектор $\overline{m}(m_1, m_2)$, равный $2\overline{AB} - 3\overline{DC}$.

в) Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.

2*. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите векторы $\overline{AC}$ и $\overline{DB}$ через векторы $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$.

3*. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(8; -3)$, $B(2; 5)$, $C(10; 11)$, $D(16; 3)$ — параллелограмм.

Вариант 2

1*. Даны точки $A(3; 4)$, $B(-1; 5)$, $C(2; 9)$, $D(-2; -8)$.

а) Найдите координаты векторов $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$.

б) Найдите вектор $\overline{n}(n_1, n_2)$, равный $3\overline{BC} - 2\overline{DA}$.

в) Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{CB}$ и $\overline{DA}$.

2*. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Выразите векторы $\overline{BD}$ и $\overline{AC}$ через векторы $\overline{DA}$ и $\overline{DC}$.

3*. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(4; 2)$, $B(5; 7)$, $C(-3; 4)$, $D(-4; -1)$ — параллелограмм.

Ответы:

Вариант 1. 1. а) $\overline{AB}(-4; 3)$, $\overline{DC}(5; 12)$; б) $\overline{m}(-23; -30)$; в) $\frac{16}{65}$.

2. $\overline{AC} = \overline{BC} - \overline{BA}$, $\overline{DB} = -\overline{BC} - \overline{BA}$. 3. $ABCD$ — параллелограмм, т.к. $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Вариант 2. 1. а) $\overline{BC}(3; 4)$, $\overline{DA}(5; 12)$; б) $\overline{n}(-1; -12)$; в) $-\frac{63}{65}$.

2. $\overline{AC} = \overline{DC} - \overline{DA}$, $\overline{BD} = -\overline{DA} - \overline{DC}$. 3. $ABCD$ — параллелограмм, т.к. $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Повторение курса геометрии 8 класса (3 ч)

Последняя тема 8 класса «Повторение». На эту тему отведено 3 часа. Повторение посвящено двум большим и очень важным для дальнейшего изучения геометрии темам: «Четырехугольники» и «Теорема Пифагора». Цель повторения — не только освежить в памяти учащихся изученный материал, но обобщить и систематизировать их знания и главным образом совершенствовать умения применять их. Поэтому в ходе повторения не дублируется работа с материалом соответствующего параграфа, а предполагается решение задач на комплексное применение знаний из разных разделов.

На каждом уроке предполагается повторение теоретического материала и решение задач. Теоретический материал, подлежащий повторению, сведен в таблицы. Эти таблицы в зависимости от желания учителя могут быть предъявлены ученикам в готовом виде — как плакат, как заранее заготовленный рисунок на доске, либо «создаваться» постепенно на доске и в тетрадях учащихся в ходе фронтальной работы.

В таблицу 1 сведены теоретические сведения о параллелограмме, прямоугольнике, ромбе и квадрате. Для обобщения и рассмотрения взаимосвязи свойств этих фигур можно использовать рисунок 6.80, который рекомендовалось рассматривать в процессе изучения § 6. В таблицу 1 включено свойство суммы квадратов сторон параллелограмма, которое рассматривается при изучении векторов (задача 38 из § 10).

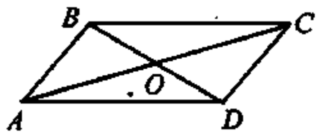
В таблицу 2 сведены теоретические сведения по теме «Теорема Пифагора».

Количество задач, предложенных для решения, избыточно. Учитель может выбрать те, которые считает полезным для решения в своем классе. Домашнее задание не предполагается.

Мы считаем нецелесообразным проведение итоговой контрольной работы, так как ее результаты не могут повлиять на итоговую оценку учащихся. Не вызовет у них интерес ее и обсуждение на последнем уроке года, так как времени на коррекцию ошибок уже нет.

Таблица 1. Свойства и признаки параллелограмма и его видов

Параллелограмм



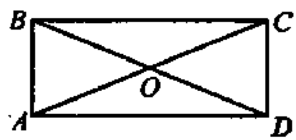
Свойства

$ABCD$ — параллелограмм $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB \parallel CD,\ BC \parallel AD;\ AB = CD,\ BC = AD;$
$\angle A = \angle C,\ \angle B = \angle D;$
$\angle A + \angle B = 180°,\ \angle B + \angle C = 180°,\ \angle C + \angle D = 180°,\ \angle D + \angle A = 180°;$
$O \in AC,\ O \in BD,\ AO = OC,\ BO = OD;$
$2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2.$

Признаки

$AB \parallel CD,\ DC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм.
$O \in AC,\ O \in BD,\ AO = OC,\ BO = OD \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм.
$AB = CD,\ BC = AD \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм.
$AB = CD,\ AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм.
$BC = AD,\ BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм

Прямоугольник



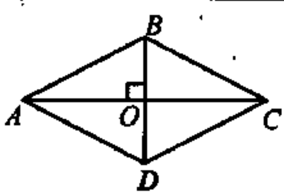
Свойства

$ABCD$ — прямоугольник $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB \parallel CD,\ BC \parallel AD;\ AB = CD,\ BC = AD;$
$\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90°;$
$AO = BO = CO = DO$ (O — центр описанной окружности, $OA = R$).

Признаки

$ABCD$ — параллелограмм, $AC = BD \Rightarrow ABCD$ — прямоугольник.
$ABCD$ — параллелограмм, $\angle A = 90° \Rightarrow ABCD$ — прямоугольник

Ромб



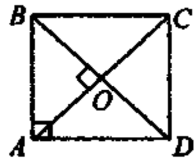
Свойства

$ABCD$ — ромб $\Rightarrow$
$AB \parallel CD,\ BC \parallel AD;\ AB = CD = DC = AD;$
$\angle A = \angle C,\ \angle B = \angle D;$
$\angle A + \angle B = 180°,\ \angle B + \angle C = 180°,$
$\angle C + \angle D = 180°,\ \angle D + \angle A = 180°;$
$AC \perp BD,\ AO = OC,\ BO = OD;$
$\angle BAO = \angle DAO,\ \angle ABO = \angle CBO;\ \angle BCO = \angle DCO,\ \angle ADO = \angle CDO.$

Признаки

$AB = CD = DC = AD \Rightarrow ABCD$ — ромб.
$ABCD$ — параллелограмм, $AC \perp BD \Rightarrow ABCD$ — ромб
$ABCD$ — параллелограмм, $\angle BAO = \angle DAO, \Rightarrow ABCD$ — ромб.

Окончание табл. 2



Квадрат
Свойства
$ABCD$ — квадрат $\Rightarrow$
$AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$; $AB = CD = DC = AD$;
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$;
$AC \perp BD$, $AO = BO = OC = OD$;
$\angle BAO = \angle ABO = \angle CBO = \angle BCO = \angle DCO = \angle CDO = \angle ADO = \angle DAO = 45°$.
Признаки
$ABCD$ — прямоугольник, $AB = CD = DC = AD \Rightarrow ABCD$ — квадрат;
$ABCD$ — ромб, $\angle A = 90° \Rightarrow ABCD$ — квадрат

Таблица 2. Трапеция

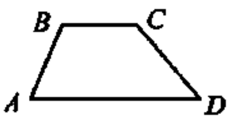
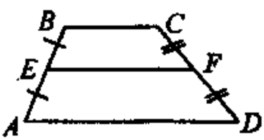
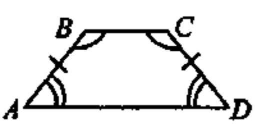
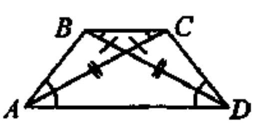
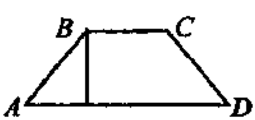
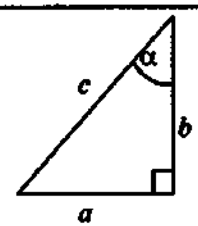
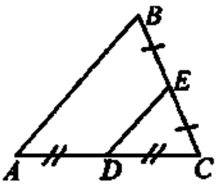
	*Свойства произвольной трапеции* $ABCD$ — трапеция, BC и AD — основания $\Rightarrow$ $\Rightarrow BC \parallel AD$, $BC \neq AD$; $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$
	*Средняя линия трапеции:* $AE = BE$, $CF = DF \Leftrightarrow EF$ — средняя линия $EF = \dfrac{BC + AD}{2}$, $EF \parallel AD \parallel BC$
  	*Свойства равнобокой трапеции* $AB = CD \Rightarrow$ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$; $AC = BD$; $AO = DO$, $BO = CO$; $\angle CAD = \angle ADB$, $\angle DBC = \angle ACB$; BH — высота $\Rightarrow HD = EF$ (EF — средняя линия) $AD = a$, $BC = b$, $AH = \dfrac{a-b}{2}$, $DH = \dfrac{a+b}{2}$.

Таблица 3. **Теорема Пифагора. Синус, косинус, тангенс острого угла. Средняя линия треугольника**

 	Теорема Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, где a — катет, противолежащий углу α, b — катет, прилежащий к углу α, c — гипотенуза
 	*Средняя линия треугольника:* $CE = BE$, $CD = DA \Leftrightarrow DE$ — средняя линия $DE = \frac{AB}{2}$, $DE \parallel AB$

Урок 66

ТЕМА: **Повторение тем «Параллелограмм», «Прямоугольник», «Теорема Пифагора»**

КОММЕНТАРИЙ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

На уроке рассматривается теоретический материал, связанный с произвольным параллелограммом и прямоугольником, а также теорема Пифагора и определения синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника, необходимые для решения прямоугольных треугольников. В ходе решения задач от учащихся следует требовать обоснований со ссылками на повторяемый теоретический материал.

Задачи

1. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла D. Докажите, что отсекаемый при этом треугольник является рав-

нобедренным. Рассмотрите два случая: а) биссектриса пересекает сторону BC; б) биссектриса пересекает сторону AB.

2. Стороны треугольника равны 3 см, 5 см и 6 см. Найдите длину медианы, проведенной к большей стороне.

Указание. Используется метод «удвоения медианы». Треугольник достраиваем до параллелограмма, отложив на продолжении медианы отрезок, равный медиане. Затем используем свойство суммы квадратов диагоналей параллелограмма.

Ответ: $2\sqrt{2}$ см.

3. Найдите периметр параллелограмма, если его высота, равная 12 см, делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, равные 16 см и 9 см.

Ответ: 80 см или 90 см.

4. Диагональ прямоугольника равна 8, а угол между диагоналями равен α. Найдите стороны прямоугольника.

Ответ: $8\sin\frac{\alpha}{2}$, $8\cos\frac{\alpha}{2}$.

5. Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону CD в точке E. Известно, что $AE = 4\sqrt{2}$, а периметр прямоугольника равен 20. Найдите стороны.

Ответ: 4 и 6.

6. Докажите, что точка пересечения диагоналей прямоугольника является центром описанной около него окружности.

7. Докажите, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.

8. Найдите стороны прямоугольника, если они относятся, как 5 : 12, а радиус описанной около него окружности равен 19,5 см.

Ответ: 15 см и 36 см.

9. Найдите углы, которые образует диагональ прямоугольника с его сторонами, если в нем:

1) диагональ и сторона соответственно равны 6 и $3\sqrt{3}$;

2) стороны равны $9\sqrt{3}$ и 9.

Ответ: 1) 30°, 60°; 2) 30°, 60°.

10. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AC = 6$, $\angle A = 30°$. Найдите длины средних линий треугольника.

Ответ: $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 3.

11. ΔABC — равнобедренный с основанием BC, MK — его средняя линия, $PM = MK$ (рис. 11.1). Определите вид четырехугольника $APKC$ и найдите его периметр, если $AB = 8$, $BC = 6$.

Ответ: 22.

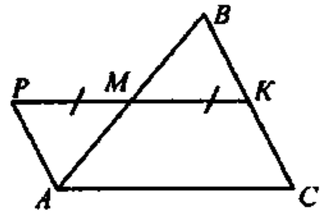


Рис. 11.1

Урок 67

ТЕМА: Повторение тем «Ромб», «Квадрат», «Теорема Пифагора»

КОММЕНТАРИЙ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

На уроке рассматривается теоретический материал, связанный с видами параллелограмма: ромбом и квадратом, а также в ходе решения задач продолжается повторение теоремы Пифагора и определений синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.

Задачи

1. В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M. Найдите углы треугольника MBC, если $\angle BAD = 76°$.

Ответ: 90°, 38°, 52°.

2. В окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AC и BD. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

Ответ: квадрат.

3. Найдите диагональ ромба, если вторая диагональ и сторона ромба соответственно равны 8 см и 16 см.

Ответ: $8\sqrt{15}$ см.

4. Определите сторону квадрата, если его диагональ равна 18 м.

Ответ: $9\sqrt{2}$ м.

5. В ромбе со стороной 20 м проведена высота, равная 16 м. Найдите диагонали ромба.

Ответ: $8\sqrt{5}$ м, $16\sqrt{5}$ м.

6. Найдите углы ромба, если его сторона равна 10, а высота равна 5.

О т в е т: 30°, 150°.

7. Найдите сторону ромба, если один из его углов равен 150°, а высота равна 5 см.

О т в е т: 10 см.

8. Один из углов ромба равен 60°, а диагональ, исходящая из вершины этого угла, равна 15 м. Найдите вторую диагональ и сторону ромба.

О т в е т: $5\sqrt{3}$ м, $5\sqrt{3}$ м.

9. Отрезок *BD* — высота равнобедренного треугольника *ABC* с основанием *AC*, *DM* — медиана треугольника *ABD*, а *DK* — медиана треугольника *DBC*. Докажите, что *DMBK* — ромб, и найдите его периметр, если *AB* = 24 см.

О т в е т: 48 см.

Урок 68

ТЕМА: Повторение тем «Трапеция», «Теорема Пифагора»

КОММЕНТАРИЙ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

На уроке рассматривается теоретический материал, связанный с трапецией, и в ходе решения задач продолжается повторение теоремы Пифагора и определений синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.

Задачи

21. *ABCD* — равнобокая трапеция, *BH* — ее высота (рис. 11.2). Найдите *AH* и *DH*, если основания равны 8 см и 18 см.

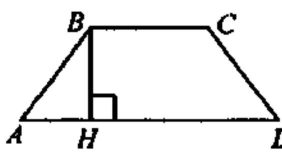


Рис. 11.2

Указание. Воспользоваться тем, что в равнобокой трапеции отрезки *AH* и *DH* равны $\frac{a-b}{2}$ и $\frac{a+b}{2}$, где a и b — основания.

22. Докажите, что если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то высота, проведенная к основанию, равна средней линии.

Указание. Найти угол, образованный диагональю и большим основанием трапеции, затем рассмотреть треугольник, катетом которого является высота, а гипотенузой — диагональ.

23. Меньшее основание равнобокой трапеции равно 7 см, высота, проведенная к основанию, равна 5 см, а угол при большем основании равен α. Найдите боковые стороны и большее основание трапеции.

О т в е т: $\frac{5}{\sin\alpha}, \frac{5}{\sin\alpha}, 7+\frac{10}{\operatorname{tg}\alpha}$.

24. Докажите, что в описанной около окружности трапеции

а) высота равна диаметру окружности,

б) сумма оснований равна сумме боковых сторон,

в) полусумма боковых сторон равна средней линии трапеции.

Указания.

б) Используя то, что отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны (рис.11.3), выражаем через x, y, z и t суммы противолежащих сторон.

Рис. 11.3

в) Используем то, что по доказанному полусумма боковых сторон равна полусумме оснований.

25. Докажите, что в описанной около окружности равнобокой трапеции боковая сторона равна средней линии.

26. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если средняя линия трапеции равна 12, а синус угла при основании трапеции равен $\frac{1}{3}$.

Указание. Используем результат задачи 24.

О т в е т: 2.

27. Найдите высоту и среднюю линию равнобокой трапеции, если ее диагональ, равная 5, образует с основанием угол, синус которого равен 0,6.

О т в е т: высота равна 3, средняя линия равна 4.

28. Найдите высоту равнобокой трапеции, у которой основания равны 10 и 26, а диагональ равна 24.

Ответ: $6\sqrt{7}$.

29. Найдите среднюю линию трапеции, если ее диагонали равны 20 и 15, а высота равна 12.

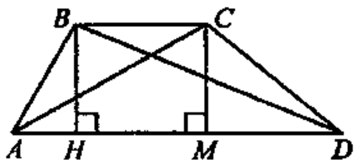


Рис. 11.4

Указание. Из прямоугольных треугольников ACM и BDH находим AM и DH (рис. 11.4). Обозначив $AH = x$, находим сумму оснований.

Ответ: 12,5.

30. Средняя линия равнобокой трапеции равна 16; ее диагональ перпендикулярна боковой стороне и равна 20. Найдите периметр трапеции.

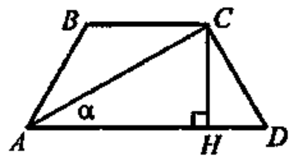


Рис. 11.5

Указание. Используя результат задачи 21, имеем $AH = 16$ (рис. 11.5). Вычислив $\cos\alpha$ в треугольнике ACH, находим с его помощью в прямоугольном треугольнике ACD гипотенузу AD. Меньшее основание находим как разность $AH - DH$.

Ответ: 62.

31. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, в которой большее основание $AD = 16$, $AB \perp AD$, $\angle D = 60°$, $\angle BAC = 30°$. Найдите среднюю линию трапеции.

Ответ: 12.

Приложение 1

Обязательный минимум содержания основных образовательных программ[1]

ГЕОМЕТРИЯ

Начальные понятия и теоремы геометрии

Равенство в геометрии.

Перпендикуляр и наклонная к прямой.

Треугольник. Неравенство треугольника. Зависимость между величинам сторон и углов треугольника.

Теорема Фалеса. Теорема Пифагора. Синус, косинус, тангенс, котангенс острого угла прямоугольного треугольника и углов от 0 до 180°; приведение к острому углу. Решение прямоугольных треугольников. Основное тригонометрическое тождество. Формулы, связывающие синус, косинус, тангенс, котангенс одного и того же угла.

Четырехугольник. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, квадрат, ромб, их свойства и признаки. Трапеция, средняя линия трапеции; равнобедренная трапеция.

Окружность и круг. Взаимное расположение прямой и окружности, *двух окружностей. Вписанные и описанные четырехугольники*[2].

Векторы

Вектор. Длина (модуль) вектора. Координаты вектора. Равенство векторов. Операции над векторами: умножение на число, сложение, разложение, скалярное произведение. Угол между векторами.

Геометрические преобразования

Примеры движений фигур. Симметрия фигур. Осевая симметрия и параллельный перенос. Поворот и центральная симметрия.

---

[1] Приказ от 05.03.2004 № 1089. Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования.

[2] Курсивом в тексте выделен материал, который подлежит изучению, но не включается в «Требования к уровню подготовки выпускников».

Требования к уровню подготовки выпускников

ГЕОМЕТРИЯ

уметь

- пользоваться языком геометрии для описания предметов окружающего мира;
- распознавать геометрические фигуры, различать их взаимное расположение;
- изображать геометрические фигуры; выполнять чертежи по условию задач; осуществлять преобразования фигур;
- проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами;
- вычислять значения геометрических величин (длин, углов), в том числе: для углов от 0 до 180° определять значения тригонометрических функций по заданным значениям углов; находить значения тригонометрических функций по значению одной из них, находить стороны, углы треугольников;
- решать геометрические задачи, опираясь на изученные свойства фигур и отношений между ними, применяя дополнительные построения, алгебраический и тригонометрический аппарат, идеи симметрии;
- проводить доказательные рассуждения при решении задач, используя известные теоремы, обнаруживая возможности для их использования;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- описания реальных ситуаций на языке геометрии;
- расчетов, включающих простейшие тригонометрические формулы;
- решения геометрических задач с использованием тригонометрии;
- решения практических задач, связанных с нахождением геометрических величин (используя при необходимости справочники и технические средства);
- построений геометрическими инструментами (линейка, угольник, циркуль, транспортир).

Учебно-методическое издание

Мельникова Наталия Борисовна

ПОУРОЧНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПО ГЕОМЕТРИИ

8 класс

Издательство **«*ЭКЗАМЕН*»**

Гигиенический сертификат
№ 77.99.60.953.Д.013269.11.07 от 13.11.2007 г.

Редактор *И.М. Бокова*
Технический редактор *Н.Я. Богданова*
Корректор *Е.В. Григорьева*
Дизайн обложки *И.Р. Захаркина*
Компьютерная верстка *М.В. Дерендяева*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры,
литература учебная

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат»
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

Печать соответствует
качеству предоставленных диапозитивов